

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER — TOULOUSE III

UFR MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE GESTION

LABORATOIRE ÉMILE PICARD

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III

Spécialité : Mathématiques pures

par

Arnaud Hilion

Dynamique des automorphismes des groupes libres

Soutenue le vendredi 10 décembre 2004 devant le jury composé de :

Michel Boileau	professeur, université Toulouse III	examineur
Thomas Delzant	professeur, université Strasbourg I	rapporteur
Vincent Guirardel	maître de conférence, université Toulouse III	examineur
Gilbert Levitt	professeur, université Caen	directeur
Martin Lustig	professeur, université Marseille III	examineur

au vu des rapports de :

Thomas Delzant	professeur, université Strasbourg I
Mark Feighn	professeur, Rutgers University - USA

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Gilbert Levitt à qui cette thèse doit beaucoup. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant pour sa grande disponibilité et l'intérêt qu'il a toujours manifesté pour mon travail, pour la liberté qu'il m'a laissée dans l'orientation de ma recherche et, plus généralement, pour m'avoir fait découvrir de belles mathématiques.

Les travaux de Mark Feighn sur les automorphismes des groupes libres ont profondément inspiré et influencé mon travail. Je suis très honoré qu'il ait accepté d'être rapporteur de ma thèse.

Je souhaite remercier chaleureusement Thomas Delzant. Les discussions que nous avons eues alors qu'il lisait ma thèse m'ont beaucoup appris, et ses remarques sur ma façon de rédiger me seront très utiles par la suite.

Martin Lustig, Vincent Guirardel et Michel Boileau me font le plaisir et l'honneur de participer au jury. Le cours de géométrie de Michel que j'ai suivi en maîtrise m'a définitivement déterminé à entreprendre une thèse, ce dont je lui suis très reconnaissant. Le temps et l'énergie que Vincent a consacrés à m'écouter m'ont beaucoup touché et bien aidé. Enfin, les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec Martin ont toujours été très stimulantes et encourageantes, son enthousiasme et sa sympathie me sont précieux.

Je remercie Yveline Panabière, Agnès Requis, Marie-Line Chemin et Rita Gomes pour leur efficacité et leur gentillesse : elles ont toujours su résoudre les difficultés administratives que j'ai rencontrées.

Un grand merci à tous les thésards du laboratoire, en particulier à celles et ceux qui ont partagé mes bureaux (salle 6 puis bureau 39), pour l'ambiance sympathique dans

laquelle j'ai pu travailler.

Merci aux "Marseillais" dont l'accueil et la gentillesse auront certainement contribué à ce que je termine d'écrire ma thèse à temps et dans de bonnes conditions : merci Thierry, merci Sonia...

Merci à tous mes amis qui sous-estiment certainement combien leur présence m'aura été utile durant ces dernières années consacrées à ma thèse : merci Laurent, Olivier, Seb, Nicolas, Grégoire, Vanessa, Sonia, Audrey, Farideh, Xavier, Philippe, Paul-Lionel, Christophe, Mathieu, Arnaud, Cédric ¹...

Merci enfin à mes parents et ma soeur que je devine soulagés de me voir enfin soutenir ma thèse !

¹ et ceux que j'oublie, et qui ne m'en voudront pas trop : ce sont des amis !

Sommaire

Introduction	1
Les influences	1
Énoncés des principaux résultats	4
Dynamique d'un automorphisme de F_N	4
Stabilisateur d'un point du bord	7
1 Préliminaires	9
1 Le groupe libre F_N et son bord	9
1.1 Définitions	9
1.2 Un point de vue plus symbolique	9
1.3 Action de F_N sur \overline{F}_N	10
1.4 Racine d'un élément de F_N	10
1.5 Points rationnels de ∂F_N - Racine d'un point rationnel	11
1.6 Graphes marqués	11
2 Automorphismes et automorphismes extérieurs de F_N	13
2.1 Généralités	13
2.2 Dynamique d'un automorphisme	16
3 Train-tracks	19
3.1 Train-tracks relatifs	20
3.2 Train-tracks relatifs améliorés	21
2 Propriétés de finitude de l'ensemble limite	27
1 Arbre φ -invariant.	27
1.1 Arbres réels	27
1.2 Arbre φ -invariant	28
2 Chemins à croissance linéaire dans les train-tracks relatifs améliorés	30

2.1	Avenir des chemins de hauteur i , lorsque H_i est une strate polynomiale	30
2.2	Chemins à croissance linéaire	32
2.3	Un lemme ferroviaire.	33
3	Application aux automorphismes de F_N	37
3.1	Ensemble exceptionnel d'un automorphisme	37
3.2	Action du stabilisateur d'un point fixe sur les directions dans un arbre φ -invariant.	39
3.3	Comportement des suites $w_{\varphi,p}$	41
3.4	Finitude des points d'accumulation	42
3	Exemples de comportements dynamiques	53
1	Dynamique au bord	53
1.1	Graphe dynamique	53
1.2	Points paraboliques	54
2	Automorphismes géométriques	56
2.1	Groupe modulaire d'une surface orientable	56
2.2	Approche à la Nielsen-Thurston des homéomorphismes des surfaces	57
2.3	Automorphismes extérieurs de F_2	62
2.4	Dynamique des automorphismes de F_2	63
4	Sous-groupes de $\text{Aut}(F_N)$ fixant un point de ∂F_N	69
1	Généralités	69
2	Point fixe attractif dans une strate exponentielle	70
2.1	Structure d'un point fixe attractif associé à une strate exponentielle.	70
2.2	Cas d'un automorphisme à puissances irréductibles	71
3	Laminations	72
3.1	Cas général	72
3.2	Cas des automorphismes à puissances irréductibles	74
3.3	Points fixes attractifs et laminations	75
4	Sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ fixant un point de ∂F_2	77

Introduction

L'objet du présent travail est l'étude de l'action d'un automorphisme d'un groupe libre sur le bord (de Gromov) du groupe. Cette thèse a été profondément influencée par les travaux :

- de J. Nielsen, puis de W. Thurston, sur les homéomorphismes des surfaces ;
- de M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel sur les automorphismes extérieurs des groupes libres ;
- de G. Levitt et M. Lustig sur la dynamique des automorphismes des groupes libres.

Avant de présenter les résultats que j'obtiens, je commence par rappeler rapidement les notions qui sont introduites par ces auteurs et qui sont à la base de cette thèse.

Les influences

Dans la première moitié du XX^e siècle, J. Nielsen étudie les homéomorphismes des surfaces dans une série d'articles ². Pour étudier un homéomorphisme f_0 d'une surface S fermée, orientable, de genre supérieur ou égal à 2, son approche consiste à considérer le revêtement universel de la surface, identifié au disque de Poincaré D , et les différents relevés f de f_0 à D . Il remarque qu'un relevé f induit un homéomorphisme ∂f du cercle à l'infini S_∞ de D , et prouve notamment que ∂f possède toujours des points périodiques sur S_∞ .

Un homéomorphisme f_0 de S induit un automorphisme extérieur (ie un automorphisme défini à composition par une conjugaison près) Φ du groupe fondamental $\pi_1(S)$ de la surface. Les différents relevés f de f_0 à D sont en bijection avec les différents automorphismes $\varphi \in \Phi$: φ et f sont en correspondance si $\varphi(g)f = fg$ pour tout $g \in \pi_1(S)$ (les éléments de $\pi_1(S)$ étant vus comme les transformations de re-

²Voir notamment [31], [32], [33], [34].

vêtement de D). En utilisant l'identification naturelle entre le cercle à l'infini S_∞ de D et le bord (de Gromov) de $\pi_1(S)$, on obtient une action de $\pi_1(S)$ sur S_∞ par homéomorphisme (l'action étant donnée par $\varphi \mapsto \partial f$; on peut noter $\partial\varphi = \partial f$).

Dans les années 70, W. Thurston donne une classification des homéomorphismes des surfaces à isotopie près (ie des éléments du groupe modulaire, ou "mapping class group", $\text{Mod}(S)$ de la surface) ³ : si f_0 est un homéomorphisme de S , il existe un découpage fini de S en sous-surfaces et un homéomorphisme f'_0 isotope à f_0 qui permute ces sous-surfaces et dont une puissance induit sur chaque sous-surface soit l'identité, soit un homéomorphisme irréductible (dans le sens que lui même et ses puissances ne fixent, à isotopie libre près, que les composantes de bord de la sous-surface). Thurston donne une forme normale pour ces homéomorphismes irréductibles, qui permet de comprendre leur comportement dynamique. Ce sont des homéomorphismes pseudo-Anosov : ils laissent invariantes deux laminations géodésiques mesurées transverses (ou de manière équivalente, deux feuilletages singuliers mesurés transverses), l'une étant dilatée d'un facteur $\lambda > 1$, l'autre contractée de λ^{-1} .

Si f_0 est un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface S fermée, en relevant à D les deux feuilletages singuliers transverses, on comprend mieux la nature des points fixes sur S_∞ d'un relevé f de f_0 fixant une singularité p des feuilletages : ce sont les points de S_∞ atteints par les feuilles singulières issues de p ; un tel point est attractif si la feuille singulière qui l'atteint appartient au feuilletage dilaté, répulsif si elle appartient au feuilletage contracté. Il y a donc un nombre fini, pair de points fixes de ∂f sur S_∞ , alternativement attractifs et répulsifs.

Le groupe fondamental d'une surface S qui possède au moins une composante de bord est un groupe libre F_N . On peut voir le revêtement universel \tilde{S} de S comme un sous-ensemble de D , et son bord $\partial\tilde{S}$ (naturellement identifié au bord de Gromov ∂F_N de F_N) comme un ensemble de Cantor plongé dans S_∞ . Un homéomorphisme f_0 d'une telle surface induit donc un automorphisme extérieur Φ de F_N . Si $\varphi \in \Phi$, on peut comprendre le comportement dynamique de $\partial\varphi$ sur ∂F_N en utilisant la forme normale de Thurston pour f_0 , et en regardant le comportement du relevé f de f_0 couplé à φ .

Les automorphismes extérieurs de F_N ne sont bien entendu pas tous induits par des homéomorphismes de surfaces. Ils sont en revanche tous induits par des équivalences d'homotopie f_0 de graphes G . Pour comprendre la dynamique au bord de F_N , l'idée est de regarder, comme pour les homéomorphismes des surfaces, les différents relevés d'une équivalence d'homotopie f_0 au revêtement universel \tilde{G} . Mais avant cela, il faut commencer par comprendre la dynamique des automorphismes

³Voir [38]. Pour une preuve utilisant le point de vue des feuilletages, voir [11]. Pour une approche plus dans la continuité de Nielsen, utilisant les laminations, voir [7], [17], [29].

extérieurs de F_N , en construisant un analogue de la forme normale de Thurston pour les équivalences d'homotopie des graphes. C'est ce que font M. Bestvina et M. Handel en 1992 dans [5] : tout automorphisme extérieur de F_N peut être représenté par un train-track relatif. C'est une équivalence d'homotopie $f_0 : G \rightarrow G$ d'un graphe, muni d'une filtration $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_t = G$ en sous-graphes f_0 -invariants. Chaque strate H_i (où H_i est l'adhérence de $G_i \setminus G_{i-1}$) est de "nature" exponentielle ou polynomiale ; les strates exponentielles sont l'analogue des homéomorphismes pseudo-Anosov. Les strates polynomiales sont responsables de phénomènes qui n'apparaissent pas pour les homéomorphismes des surfaces. Notamment, la croissance des classes de conjugaison du groupe fondamental d'une surface sous l'action d'un automorphisme extérieur induit par un homéomorphisme (ou de manière équivalente la croissance des géodesiques fermées de la surface sous l'action de l'homéomorphisme) est soit nulle (si la courbe est périodique sous l'action de l'homéomorphisme), soit linéaire (par exemple si l'homéomorphisme est un twist de Dehn, et la courbe transverse à la courbe le long de laquelle on twist), soit exponentielle (par exemple si l'homéomorphisme est pseudo-Anosov). L'existence de strates polynomiales dans un train-track entraîne que certaines classes de conjugaison sont à croissance polynomiale de degré $d \geq 2$.

L'existence de train-tracks relatifs pour tout automorphisme extérieur de F_N permet aux auteurs de [5] de prouver la conjecture de Scott : si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, alors $\text{rgFix}\varphi \leq N$. En fait, les train-tracks permettent plus généralement de contrôler le comportement dynamique d'un automorphisme extérieur de F_N . Dans [3], les auteurs sont amenés à introduire des train-tracks relatifs améliorés pour prouver que le groupe $\text{Out}(F_N)$ vérifie l'alternative de Tits (cf [3], [1]) : tout sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$ soit contient un sous-groupe libre de rang 2, soit est virtuellement résoluble (en fait virtuellement abélien - cf [4]).

Lorsqu'on étudie un homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface (qui induit un automorphisme extérieur Φ sur le groupe fondamental de la surface), il est intéressant de considérer l'arbre réel T^+ (resp. T^-) dual au feuilletage dilaté (resp. contracté), que l'on peut voir comme l'espace des feuilles du relevé du feuilletage dilaté au revêtement universel de la surface. Cet arbre est muni d'une action naturelle du groupe fondamental de la surface par isométries, et les stabilisateurs d'arcs sont triviaux. De plus, si $\varphi \in \Phi$, T^+ est préservé par une homothétie \mathcal{H} de rapport λ (où $\lambda > 1$ est le coefficient de dilatation du feuilletage) couplée à φ (dans le sens que $\varphi(g)\mathcal{H} = \mathcal{H}g$ pour tout élément g du groupe fondamental, vu comme une isométrie de T).

Si l'on se donne un train-track relatif représentant un automorphisme extérieur Φ , on peut aussi construire un arbre réel T par un procédé limite : si la strate supérieure du train-track est polynomiale, on obtient un arbre simplicial, et si elle

est exponentielle, on obtient un arbre réel. Ici encore, T est muni d'une action de F_N par isométries, les stabilisateurs d'arc sont triviaux, et pour tout $\varphi \in \Phi$, il existe une homothétie \mathcal{H} de rapport $\lambda \geq 1$ couplée à φ . Cet arbre, appelé arbre φ -invariant, est utilisé dans par D. Gaboriau, G. Levitt et M. Lustig dans [14] pour donner une nouvelle preuve de la conjecture de Scott, et une généralisation dans [12]. Il est par la suite étudié en détails dans une série d'articles de G. Levitt et M. Lustig ⁴ concernant la dynamique des automorphismes de F_N .

Un autre objet dynamique associé à une strate exponentielle d'un train-track relatif, est la lamination attractive, introduite dans [2] pour un automorphisme extérieur Φ à puissances irréductibles ⁵, et dans [3] en toute généralité : c'est l'analogue de la lamination géodésique dilatée d'un homéomorphisme de surface.

Énoncés des principaux résultats

Dynamique d'un automorphisme de F_N

Un automorphisme φ de F_N induit un homéomorphisme $\partial\varphi$ du bord (de Gromov) ∂F_N , et un homéomorphisme $\overline{\varphi}$ de $\overline{F}_N = F_N \cup \partial F_N$. Remarquons que ∂F_N et \overline{F}_N sont des compacts (en fait, ∂F_N est un ensemble de Cantor). Le but général de cette thèse est l'étude des propriétés des systèmes dynamiques $(\partial F_N, \partial\varphi)$ et $(\overline{F}_N, \overline{\varphi})$. Je rassemble dans le théorème suivant plusieurs faits déjà connus.

Théorème ([12], [24], [22]). Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$.

- (i) $\partial\varphi$ possède au moins 2 points périodiques de période inférieure ou égale à $2N$.
Si $\partial\varphi$ ne possède qu'une seule orbite de points périodiques, alors cette orbite est d'ordre 2.
- (ii) Chaque orbite périodique de $\overline{\varphi}$ est d'ordre borné par M_N , où M_N est une constante qui ne dépend que de N et qui vérifie $M_N \sim \sqrt{N \log N}$ quand $N \rightarrow +\infty$.
- (iii) $\overline{\varphi}$ a une dynamique asymptotiquement périodique sur \overline{F}_N , ie pour tout $x \in \overline{F}_N$, la suite $\overline{\varphi}^k(x)$ s'accumule sur une orbite périodique de $\overline{\varphi}$.
- (iv) Un point fixe de $\partial\varphi$ qui n'est pas dans le bord du sous-groupe fixe $\text{Fix } \varphi$ de φ est soit attractif, soit répulsif pour $\overline{\varphi}$. Si $a(\varphi)$ désigne le nombre de classes isoglosses de l'ensemble des points attractifs de $\overline{\varphi}$, on obtient que : $\text{rgFix } \varphi + \frac{1}{2}a(\varphi) \leq N$.

⁴Voir [23], [24], [22]

⁵ Φ est à puissances irréductibles si lui même et ses puissances ne fixent aucune classe de conjugaison d'élément de F_N .

- (v) Un point attractif de $\overline{\varphi}$ est super-attractif par rapport à la structure Hölder canonique sur ∂F_N , avec un coefficient d'attractivité $\lambda \geq 1$. Si $\lambda > 1$, alors λ est le taux de croissance exponentielle d'une classe de conjugaison sous itération de φ .

On dit que $X, Y \in \partial F_N$ sont isoglosses s'il existe $m \in \text{Fix} \varphi$ tel que $Y = mX$. Les points (i), (ii) et (v) sont démontrés dans [24], le point (iii) dans [22], le point (iv) dans [12]. La quantité $\text{ind}(\varphi) = \text{rgFix} \varphi + \frac{1}{2}a(\varphi) - 1$ est appelée l'indice de φ .

Les automorphismes intérieurs de F_N forment un sous-groupe normal de $\text{Aut}(F_N)$. Le groupe quotient $\text{Out}(F_N)$ est le groupe des automorphismes extérieurs de F_N . Soit φ et φ' deux automorphismes de F_N dans la même classe extérieure. Il peut arriver que φ et φ' soient conjugués par une conjugaison i_u ($\varphi' = i_u \circ \varphi \circ i_u^{-1} = i_{u\varphi(u)^{-1}} \circ \varphi$) : on dit que φ et φ' sont isogrédiants. Dans ce cas, leur dynamique aussi est conjuguée. En revanche, si φ et φ' ne sont pas isogrédiants, leurs dynamiques peuvent être très différentes. Je rassemble dans le théorème suivant des résultats concernant la dynamique des classes d'isogrédiance d'un automorphisme extérieur de F_N .

Théorème ([12], [23]). Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, $N \geq 2$.

- (i) Φ possède une infinité de classes d'isogrédiance.
- (ii) Toutes les classes d'isogrédiance, sauf un nombre fini, ont une dynamique nord-sud sur ∂F_N .
- (iii) Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \Phi$ ne sont pas deux à deux isogrédiants, alors

$$\sum_{i=1}^p \text{ind}(\varphi_i) \leq N - 1.$$

On dit que $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ a une dynamique nord-sud sur ∂F_N si $\partial \varphi$ a 2 points fixes $a^+, a^- \in \partial F_N$ et pour tout $x \in \partial F_N \setminus \{a^+, a^-\}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \partial \varphi^k(x) = a^+$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \partial \varphi^{-k}(x) = a^-$. Les points (i) et (ii) sont démontrés dans [23], le point (iii) dans [12].

On a dit qu'un automorphisme φ de F_N a une dynamique asymptotiquement périodique sur \overline{F}_N . Puisque les orbites de $\overline{\varphi}$ sont d'ordre borné, cela signifie qu'il existe une puissance de φ telle que :

- les points périodiques de $\overline{\varphi}$ sont en fait des points fixes,
- si $x \in \overline{F}_N$, la limite de la suite $\overline{\varphi}^k(x)$ est un point $\omega(x) \in \text{Fix} \overline{\varphi}$; en fait, si $x \notin \text{Fix} \varphi$, $\omega(x) \in \text{Fix} \partial \varphi$.

Je souhaite comprendre quels sont les points de $\text{Fix} \partial \varphi$ sur lesquels s'accumulent les suites $\overline{\varphi}^k(x)$ ($x \notin \text{Fix} \overline{\varphi}$), et quelle est la dynamique au voisinage d'un tel point. Je note $L_{\partial \varphi}^+$ la réunion des $\omega(x)$ pour $x \notin \text{Fix} \overline{\varphi}$.

Bien entendu, $L_{\partial\varphi}^+$ contient l'ensemble des points attractifs de $\overline{\varphi}$, au voisinage desquels on comprend bien la dynamique. L'inconnu, ce sont les points de $L_{\partial\varphi}^+$ dans le bord de $\text{Fix}\varphi$. Un point rationnel est un point de ∂F_N de la forme u^∞ (avec $u \in F_N$, $u \neq 1$). Le résultat principal du chapitre 2 est le suivant (cf théorème 2.15) :

Théorème. Il existe une constante M_N (qui ne dépend que de N) telle que si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ est tel que $\text{Fix}\overline{\varphi} = \text{Per}\overline{\varphi}$, alors il y a au plus M_N classes isoglosses d'éléments de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$. De plus, les éléments de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ sont tous des points rationnels.

Le chapitre 2 est consacré à la preuve de ce théorème. La démonstration se fait par récurrence sur le rang de F_N . J'utilise un arbre φ -invariant, et une homothétie \mathcal{H} couplée à φ , comme dans la preuve de la périodicité asymptotique dans [22]. Lorsque \mathcal{H} n'a pas de point fixe dans T , on montre facilement que $\overline{\varphi}$ a une dynamique nord-sud. Lorsque \mathcal{H} fixe un point Q_0 de T , le stabilisateur $\text{Stab}Q_0$ de Q_0 dans F_N est φ -invariant et de rang strictement inférieur à N . Il s'agit alors de comprendre quels sont les points de $L_{\partial\varphi}^+$ qui ne sont pas dans $L_{\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$. Par exemple, si \mathcal{H} possède un unique point fixe Q_0 , et si $g \in F_N \setminus \text{Stab}Q_0$, on montre que $\omega(g)$ ne dépend que de la composante connexe \mathcal{C} de $T \setminus \{Q_0\}$ qui contient gQ_0 . Plus précisément, si \mathcal{C} est fixée par \mathcal{H} , alors $\omega(g)$ est un point attractif de $\overline{\varphi}$; sinon, $\mathcal{H}^k\mathcal{C}$ "tourne" autour de Q_0 , et $\omega(g)$ ne dépend que de l'élément $w \in \text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w\mathcal{C}$: $\mathcal{H}^k\mathcal{C} = w_{\varphi,k}\mathcal{C}$ où $w_{\varphi,k} = \varphi^{k-1}(w) \dots \varphi(w)w$. Il me faut donc étudier en détail le comportement des suites $w_{\varphi,k}$. Essentiellement (cf corollaire 2.14), si $w \notin \text{Fix}\varphi$, la limite de la suite $w_{\varphi,k}$ est la même que celle de $\varphi^k(w)$ (ce qui permet de faire fonctionner la récurrence), mais si $w \in \text{Fix}\varphi$, la limite de la suite $w_{\varphi,k}$ est $w^{+\infty}$: $w^{+\infty}$ est un élément de $L_{\partial\varphi}^+$ qui n'est pas, a priori, dans $L_{\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$. Il me faut contrôler précisément quels sont les éléments w de $\text{Fix}\varphi$ qui donnent lieu à ces nouvelles limites, ce qui m'amène à introduire l'ensemble exceptionnel \mathcal{A}_φ de l'automorphisme φ (cf section 3.1 du chapitre 2), et à en étudier le cardinal (modulo l'action de $\text{Fix}\varphi$ par conjugaison, et quitte à prendre une racine) : c'est l'objet du théorème 2.10, dont la preuve utilise tout l'outillage des train-tracks relatifs améliorés concernant les strates polynomiales.

Dans le chapitre 3, j'associe un graphe fini Γ_φ à tout automorphisme φ tel que $\text{Per}\overline{\varphi} = \text{Fix}\overline{\varphi}$: les sommets sont les classes isoglosses de points de $L_{\partial\varphi}^+ \cup L_{\partial\varphi^{-1}}^+$, et on place une arête orientée entre deux sommets s'il existe une orbite $\partial\varphi^k(x)$ ($k \in \mathbb{Z}$) entre deux représentants des classes isoglosses.

Concernant la dynamique au voisinage d'un point de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$, il peut se passer des choses étranges. J'ai longtemps naïvement cru qu'il n'existait pas d'orbite parabolique (ie un point $x \notin \text{Fix}\partial\varphi$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \partial\varphi^k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \partial\varphi^{-k}(x)$).

Erreur ! Dans le chapitre 3, je donne un exemple d'automorphisme de F_4 qui possède une orbite parabolique.

J'y étudie aussi en détail la dynamique des automorphismes induits par un homéomorphisme de surface, ainsi que la dynamique des automorphismes de F_2 . En particulier, je donne les graphes Γ_φ que l'on obtient.

Stabilisateur d'un point du bord

Le chapitre 4 est consacré à la question suivante : si $X \in \partial F_N$, quels sont les automorphismes $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ tels que X soit point fixe de $\partial\varphi$. On désigne par $\text{Stab}(X)$ le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_N)$. Plus généralement, quels sont les sous-groupes de F_N que l'on obtient comme stabilisateurs d'un point du bord de F_N , à isomorphisme près ? voire à conjugaison près par un automorphisme de F_N ?

Soit Φ est un automorphisme extérieur de F_N à puissances irréductibles, $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track (absolu) représentant Φ , et $\varphi \in \Phi$. Si X est un point fixe attractif de φ , j'étudie en détail la forme d'un rayon représentant X dans G . Je peux alors démontrer le :

Théorème. Si $\psi \in \text{Aut}(F_N)$ fixe X , alors l'automorphisme extérieur Ψ défini par ψ stabilise la lamination attractive Λ_Φ^+ de l'automorphisme extérieur Φ défini par φ .

En utilisant le théorème de M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel qui affirme que le stabilisateur $\text{Stab}(\Lambda_\Phi^+)$ de Λ_Φ^+ dans $\text{Out}(F_N)$ est virtuellement infini cyclique (cf théorème 2.14 de [2]), j'en déduis le :

Corollaire. Le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_N)$ est infini cyclique.

En utilisant l'étude des points fixes des automorphismes de F_2 faite au chapitre 3, je peux alors montrer le :

Théorème.

- Si $X \in \partial F_2$ un point non rationnel, alors le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_2)$ est soit trivial, soit infini cyclique.
- A isomorphisme près, les sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ qui fixent un élément du bord de F_2 sont les mêmes que ceux qui fixent un élément de F_2 .

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, je rappelle des résultats et des constructions de Bestvina, Feighn et Handel ([5], [3], [1]), Levitt et Lustig ([23],[24],[22],[25], [26], [27]), et je fixe des notations que j'utiliserai dans toute la suite du texte.

1 Le groupe libre F_N et son bord

1.1 Définitions

On désigne par F_N le groupe libre de rang $N \geq 2$. Si l'on munit F_N de la métrique des mots associée à une base $\{a_1, \dots, a_N\}$, F_N est un espace 0-hyperbolique au sens de Gromov (voir [16], ou pour plus de détails [8], [15] par exemple). On peut alors considérer le bord (de Gromov) de F_N , que l'on note ∂F_N : c'est un ensemble de Cantor qui compactifie F_N en $\overline{F}_N = F_N \cup \partial F_N$. On peut aussi voir ∂F_N comme l'espace des bouts de F_N .

Si K est un sous-groupe de F_N de type fini, alors son bord ∂K se plonge naturellement dans ∂F_N .

1.2 Un point de vue plus symbolique

Cette section est consacrée à expliquer comment retrouver ces notions d'un point de vue symbolique.

Une base a_1, \dots, a_N de F_N étant fixée, on peut voir F_N comme l'ensemble des mots réduits $x = x_1 \dots x_k$ sur l'alphabet \mathcal{A} constitué des $a_i^{\pm 1}$ (x est réduit si $x_i \neq x_{i+1}^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$; k est la longueur de x , notée $|x|$). De même, ∂F_N

est l'ensemble des suites infinies réduites (ou mots infinis réduits) $X = x_1 \dots x_k \dots$ sur \mathcal{A} . Enfin, \overline{F}_N est la réunion de F_N et ∂F_N .

La métrique des mots induit la topologie discrète sur F_N . Si $g \in F_N$, on désigne par $\partial_g F_N$ l'ensemble des mots infinis réduits dont g est préfixe : c'est un ouvert de ∂F_N . On appelle $\partial_g F_N$ le **cylindre** défini par g^{-1} . Remarquons que $\partial_1 F_N = \partial F_N$. Si $X \in \partial F_N$, on obtient un système fondamental de voisinages de X dans ∂F_N en considérant $\{\partial_x F_N | x \text{ préfixe de } X\}$. On retrouve ainsi la topologie sur ∂F_N .

Pour la topologie sur \overline{F}_N , on procède de la manière suivante. Si $g \in F_N$, on définit $\mathcal{C}_g F_N$ comme l'ensemble des mots de \overline{F}_N dont g est préfixe. On appelle \mathcal{C}_g le **cône** défini par g^{-2} . Remarquons que $\mathcal{C}_1 F_N = \overline{F}_N$. Si $X \in F_N$, $\{\mathcal{C}_x F_N | x \text{ préfixe de } X\}$ est un système fondamental de voisinage de X dans \overline{F}_N .

On peut aussi définir le produit de Gromov $(x|y)$ de deux éléments $x, y \in \overline{F}_N$ comme la longueur de leur plus long préfixe (ie sous-mot initial) commun. Alors une suite x_p d'éléments de \overline{F}_N converge vers $X \in \partial F_N$ si, et seulement si $(x_p|X) \rightarrow \infty$.

1.3 Action de F_N sur \overline{F}_N

Si $w \in F_N$, on désigne par i_w la conjugaison par w : $i_w(g) = wgw^{-1}$ pour tout $g \in F_N$; et par $\partial i_w : \partial F_N \rightarrow \partial F_N$ la translation à gauche par w : $\partial i_w(X) = wX$ pour tout $X \in \partial F_N$.

Le groupe F_N agit sur lui-même par conjugaison. Cette action est continue, et s'étend continûment en l'action de F_N sur ∂F_N par translation à gauche. On obtient ainsi une action de F_N sur \overline{F}_N par homéomorphismes.

1.4 Racine d'un élément de F_N

Soit $g \in F_N$. On dit que $u \in F_N$ est **une racine** de g s'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ tel que $g = u^k$; on dit aussi que g est une puissance de u . Parmi les racines de g , il en existe une seule qui rende k maximal : c'est **la racine** de g , que l'on note \sqrt{g} . Remarquons que l'on peut aussi caractériser \sqrt{g} comme la plus courte des racines de g (pour la longueur des mots dans une base de F_N). En fait, toute racine de g est une puissance de \sqrt{g} .

On dit qu'un élément de F_N est **primitif**³ s'il est égal à sa racine. Si $A \subseteq F_N$, on désigne par \sqrt{A} l'ensemble des éléments primitifs de A .

¹Cette notion est à rapprocher de la notion de cylindre en dynamique formelle classique (ie sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_N\}$ dont les symboles "n'ont pas de relation" entre eux) - cf [20].

²cf la notion de type conique utilisée par exemple dans [10] ou [8].

³Attention, dans la littérature, on utilise aussi l'adjectif *primitif* pour qualifier un élément de F_N qui peut être complété en une base de F_N : ce ne sera jamais le cas dans ce document.

Remarque 1.1. Si $g, w \in F_N$, on a :

- $\sqrt{g^{-1}} = \sqrt{g}^{-1}$;
- $\sqrt{w g w^{-1}} = w \sqrt{g} w^{-1}$; en particulier, si un sous-groupe H de F_N agit par conjugaison sur un sous-ensemble $A \subseteq F_N$, alors H agit aussi par conjugaison sur \sqrt{A} .

1.5 Points rationnels de ∂F_N - Racine d'un point rationnel

Soit $g \in F_N$, $g \neq 1$. Alors la suite g^k converge vers un élément de ∂F_N , que l'on note g^∞ ou $g^{+\infty}$. On définit $g^{-\infty}$ comme étant $(g^{-1})^\infty$. On dit qu'un point $X \in \partial F_N$ est un **point rationnel** s'il est de la forme g^∞ pour un certain $g \in F_N$, $g \neq 1$; on dit alors que g est une **racine** de X . On vérifie que si $g, g' \in F_N$ sont des racines de X , alors $\sqrt{g} = \sqrt{g'}$. On définit alors la **racine** de X , que l'on note \sqrt{X} , comme étant la racine de g .

Si A est un sous-ensemble de points rationnels de ∂F_N , on désigne par \sqrt{A} l'ensemble des racines des éléments de A . L'application $\sqrt{\cdot} : A \rightarrow \sqrt{A}$ est une bijection. Si $g \in F_N$ et $X \in \partial F_N$, $\sqrt{gX} = g\sqrt{X}g^{-1}$. En particulier, un sous-groupe H de F_N agit sur A par translation à gauche si, et seulement si, il agit par conjugaison sur \sqrt{A} .

Les points rationnels de ∂F_N forment un sous-ensemble dénombrable (puisqu'en bijection avec $\sqrt{F_N} \setminus \{1\}$) dense (puisque un cylindre $\partial_g F_N$, $g \neq 1$, contient toujours g^∞).

Si $B \subseteq F_N$, on définit $\mathcal{R}(B) = \{X \in \partial F_N \mid \sqrt{X} \in \sqrt{B}\}$; notamment, $\mathcal{R}(F_N)$ est l'ensemble des points rationnels de ∂F_N . Remarquons que $\sqrt{\mathcal{R}(B)} = \sqrt{B}$.

1.6 Graphes marqués

Dans cette section, je rappelle des définitions que l'on peut trouver dans les sections 2.1 et 2.2 de [3].

Définition

On appelle **rose** à N pétales le graphe à N arêtes et un sommet $*$, que l'on note R_N . On identifie $\pi_1(R_N, *)$ avec F_N .

Un **graphe marqué** est une équivalence d'homotopie $\tau : R_N \rightarrow G$ entre la rose et un graphe G . En considérant que τ induit l'identité entre $\pi_1(R_N, *)$ et $\pi_1(G, \tau(*))$, on identifie F_N avec $\pi_1(G, \tau(*))$.

On désigne par \tilde{G} le revêtement universel de G , et $pr : \tilde{G} \rightarrow G$ la projection associée : \tilde{G} est un arbre simplicial, dont les sommets sont de valence finie. De plus,

\tilde{G} est muni de l'action naturelle de F_N par transformations de revêtement.

Chemins dans les graphes

Un **chemin** de \tilde{G} est un plongement $w : I \rightarrow X$, où I est un intervalle réel fermé (ie $I = [a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, b]$ ou \mathbb{R} , $a, b \in \mathbb{R}$), ou éventuellement une application constante $[a, b] \rightarrow X$ (dans ce cas, on dit que le chemin est trivial). On dit que $w(a)$ (resp. $w(b)$) est le point initial (resp. final) de w ; on dit aussi que $w(a)$ et $w(b)$ sont les extrémités de w , et que w est un **chemin pointé** en $w(a)$. En fait, on ne s'intéressera vraiment qu'à l'image orientée de w , et on continuera de parler du chemin w . On désignera par w^{-1} le chemin w dont on a changé l'orientation.

On peut définir une distance sur \tilde{G} en considérant que toutes les arêtes sont isométriques au segment $[0, 1]$. Un chemin isométrique à un intervalle borné est appelé un **chemin fini**; sa longueur est la longueur d'un tel intervalle. Un chemin dans T sera appelé un **rayon** (resp. une **ligne**) s'il est isométrique à $[0, +\infty[$ (resp. à \mathbb{R}); sa longueur est infinie.

Remarquons que toute application continue $w : [a, b] \rightarrow \tilde{G}$ est homotope relativement $\{w(a), w(b)\}$ à un unique chemin fini : c'est $[w(a), w(b)]$, que l'on note $[w]$. On dit que $[w]$ est obtenu **en tendant** w .

Enfin, on définit un chemin (resp. un chemin fini, un rayon, une ligne) de G comme la composition d'un chemin de \tilde{G} par la projection pr . Ici encore, toute application continue $w : [a, b] \rightarrow G$ est homotope relativement $\{w(a), w(b)\}$ à un unique chemin fini que l'on note $[w]$; on dit que $[w]$ est obtenu en tendant w .

Bord du revêtement universel d'un graphe marqué

Rappelons que \tilde{G} est un arbre simplicial dont les sommets sont de valence bornée. On peut donc considérer son bord (de Gromov) $\partial\tilde{G}$: c'est un ensemble de Cantor qui compactifie \tilde{G} . En utilisant le marquage $\tau : R_N \rightarrow G$ (ou de manière équivalente l'action de F_N sur \tilde{G}), on identifie naturellement $\partial\tilde{G}$ à ∂F_N .

Deux rayons de \tilde{G} sont dit équivalents si l'intersection de leurs images est encore l'image d'un rayon. On peut voir $\partial\tilde{G}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence des rayons de \tilde{G} . En particulier, une ligne de \tilde{G} définit deux points distincts de $\partial\tilde{G}$ (les classes d'équivalence des deux rayons obtenus en coupant la ligne en un de ses points), donc deux points distincts de ∂F_N . Réciproquement, deux points distincts de ∂F_N définissent une unique ligne de \tilde{G} .

2 Automorphismes et automorphismes extérieurs de F_N

2.1 Généralités

Action des automorphismes de F_N sur ∂F_N et \overline{F}_N

On désigne par $\text{Aut}(F_N)$ le groupe des automorphismes de F_N . Un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ induit un homéomorphisme $\partial\varphi$ de ∂F_N (en tant que quasi-isométrie de F_N), et un homéomorphisme $\overline{\varphi} = \varphi \cup \partial\varphi$ de \overline{F}_N .

D'un point de vue symbolique, si $X = x_1 \dots x_k \dots \in \partial F_N$, alors la suite $y_p = \varphi(x_1 \dots x_p)$ converge vers un point de ∂F_N , que l'on définit comme étant $\partial\varphi(X)$.

Remarquons si $w \in F_N$, la conjugaison i_w induit bien la translation à gauche par w sur ∂F_N (ce qui assure la cohérence de la notation ∂i_w pour la translation à gauche par w).

Automorphismes extérieurs de F_N

On désigne par $\text{Int}(F_N)$ le sous-groupe des conjugaisons (ou automorphismes intérieurs) de F_N : c'est un sous-groupe normal de $\text{Aut}(F_N)$, et le groupe quotient $\text{Out}(F_N) = \text{Aut}(F_N)/\text{Int}(F_N)$ est appelé groupe des automorphismes extérieurs de F_N .

Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$. Alors Φ induit par abélianisation un automorphisme de \mathbb{Z}^N . On désigne par

$$\text{Ab} : \text{Out}(F_N) \rightarrow \text{GL}_N(\mathbb{Z})$$

le morphisme ainsi obtenu. On définit $\text{Out}^+(F_N)$ comme l'image réciproque de $\text{SL}_N(\mathbb{Z})$. De même, $\text{Aut}^+(F_N)$ est l'image réciproque de $\text{Out}^+(F_N)$ par la surjection canonique $\text{ext} : \text{Aut}(F_N) \rightarrow \text{Out}(F_N)$.

Représentants topologiques

Définition ⁴ Si G est un graphe marqué ($\tau : R_N \rightarrow G$ le marquage, $*$ le sommet de R_N), une équivalence d'homotopie $f_0 : G \rightarrow G$ induit un automorphisme extérieur de $\pi_1(G, \tau(*)) \simeq F_N$.

Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$. Un **représentant** topologique de Φ est une équivalence d'homotopie $f_0 : G \rightarrow G$, où G est un graphe marqué, telle que :

- l'image d'un sommet est un sommet,
- la restriction de f_0 à une arête est une immersion,

⁴Voir la section 2.1 de [3]

- f_0 induit Φ sur $F_N \simeq \pi_1(G, \tau(*))$.

Application induite sur les chemins finis Un représentant topologique $f_0 : G \rightarrow G$ induit une application $f_{0\#}$ sur les chemins finis de G : si w est un chemin fini, $f_{0\#}(w) = [f_0(w)]$. Si f est un relevé de f_0 au revêtement universel \tilde{G} , et w un chemin fini de \tilde{G} , on définit $f_{\#}(w)$ comme étant $[f(w)]$. Remarquons que si w est un chemin fini de G , \tilde{w} un relevé de w dans \tilde{G} , et f un relevé de f_0 à \tilde{G} , alors $f_{0\#}(w)$ s'obtient en composant $f_{\#}(w)$ par la projection du revêtement universel $pr : \tilde{G} \rightarrow G$.

Chemins de Nielsen - Classes de Nielsen de points fixes ⁵ Un chemin fini w de G est appelé un **chemin de Nielsen** si $f_{0\#}(w) = w$: en particulier, les extrémités de w sont des points fixes de f_0 . On dit que deux points fixes de f_0 sont Nielsen-équivalents s'il existe un chemin de Nielsen dans G les reliant. "Être Nielsen-équivalent" est une relation d'équivalence sur les points fixes de f_0 : les classes sont appelées **classes de Nielsen** de points fixes de f_0 . Un **chemin de Nielsen périodique** est un chemin de Nielsen pour une puissance f_0^r ($r \geq 1$) de f_0 .

Couplage

Définition ⁶ Si $f_0 : G \rightarrow G$ est un représentant topologique de $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des relevés f de f_0 au revêtement universel \tilde{G} de G et les automorphismes φ dans la classe extérieure Φ . Un automorphisme $\varphi \in \Phi$ et un relevé f de f_0 sont en correspondance si, et seulement si

$$\varphi(g)f = fg \quad \forall g \in F_N,$$

où les éléments de F_N sont vus comme les transformations de revêtement de \tilde{G} . On dit alors que φ et f sont **couplés**.

Remarque 1.2. Considérons un relevé f et un automorphisme φ couplés.

- Soit $g \in F_N$. Alors $g \in \text{Fix}\varphi$ si, et seulement si g et f commutent.
- En utilisant l'identification naturelle de $\partial\tilde{G}$ et ∂F_N (par le marquage), on voit que ∂f s'identifie à $\partial\varphi$.

⁵Je renvoie le lecteur au chapitre 1 de [19] pour une introduction efficace à la théorie des points fixes de Nielsen, dans un cadre général.

⁶Dans ce paragraphe, je rappelle des faits élémentaires de théorie galoisienne des revêtements appliqués au cas des représentants topologiques ; voir par exemple la section 2.2 de [12] et la section 2 de [5]

Application induite sur les chemins infinis Soit f un relevé de f_0 et $\varphi \in \Phi$ l'automorphisme couplé à f . Si v est un point de \tilde{G} et R un rayon pointé en v représentant un point $X \in \partial F_N$, on définit $f_{\#}(R)$ comme étant le rayon pointé en $f(v)$ qui représente $\partial\varphi(X)$. Si v_0 est un point de G et R_0 un rayon pointé en v_0 , on définit $f_{0\#}(R_0)$ comme la composition de $f_{\#}(R)$ par la projection du revêtement universel $pr : \tilde{G} \rightarrow G$, où R est un relevé de R_0 dans \tilde{G} . Si l est une ligne de \tilde{G} et X_1, X_2 les deux points de ∂F_N qu'elle définit, on définit $f_{\#}(l)$ comme étant la ligne de \tilde{G} définie par les deux points distincts $\partial\varphi(X_1), \partial\varphi(X_2) \in \partial F_N$. Si l_0 est une ligne de G , on définit $f_{0\#}(l_0)$ comme la composition de $f_{\#}(l)$ par pr , où l est un relevé de l_0 dans \tilde{G} .

Scindements Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un représentant topologique d'un automorphisme extérieur Φ , et x un chemin dans G . On dit que $x = \dots x_{l-1}x_l \dots$, où les x_l sont des sous-chemins non triviaux de x , est un **scindement** (pour f_0), et on note alors $x = \dots \cdot x_{l-1} \cdot x_l \cdot \dots$, si pour tout entier k , $f_{0\#}^k(x) = \dots f_{0\#}^k(x_{l-1})f_{0\#}^k(x_l) \dots$. Dans ce cas, on dit que les x_l sont des **briques** de x .

Soit f un relevé de f_0 au revêtement universel \tilde{G} , et x un chemin dans \tilde{G} . On dit que $x = \dots x_{l-1}x_l \dots$, où les x_l sont des sous-chemins non triviaux de x , est un **scindement** (pour f), et on note alors $x = \dots \cdot x_{l-1} \cdot x_l \cdot \dots$, si pour tout entier k , $f_{\#}^k(x) = \dots f_{\#}^k(x_{l-1})f_{\#}^k(x_l) \dots$. Dans ce cas, on dit encore que les x_l sont des briques de x .

Classes d'isogrédience

Lorsque deux relevés f_1 et f_2 de f_0 sont conjugués par une transformation de revêtement, les dynamiques de ∂f_1 et ∂f_2 sont simplement conjuguées. Comme J. Nielsen, on dit alors que f_1 et f_2 sont **isogrédients**⁷.

On peut bien sûr transposer de la notion d'isogrédience pour des automorphismes dans une même classe extérieure. Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$. On dit que φ_1 et φ_2 sont **isogrédients** s'il existe $g \in F_N$ tel que $\varphi_1 = i_g \circ \varphi_2 \circ i_g^{-1}$. L'isogrédience est une relation d'équivalence. On note $\mathcal{I}(\Phi)$ l'ensemble des classes d'isogrédience de Φ .

⁷Voir [31], [32], [33], [34]

Classes de φ -conjugaison

On dit que deux éléments w et w' de F_N sont φ -conjugués, s'il existe $g \in F_N$ tel que $w' = gw\varphi(g^{-1})$. La φ -conjugaison⁸ est une relation d'équivalence sur les éléments de F_N . Remarquons que les classes de id -conjugaison sont simplement les classes de conjugaison. L'intérêt de cette notion réside dans la correspondance entre les classes de φ -conjugaison d'éléments de F_N et les classes d'isogrédience de Φ , comme indiqué dans le :

Lemme 1.3. Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ la classe extérieure de φ , et $w, w' \in F_N$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) w et w' sont φ -conjugués ;
- (ii) $i_w \circ \varphi$ et $i_{w'} \circ \varphi$ sont isogrédients.

Preuve. Remarquons tout d'abord que $i_g \circ (i_w \circ \varphi) \circ i_{g^{-1}} = i_{gw\varphi(g^{-1})} \circ \varphi$. Les automorphismes $i_w \circ \varphi$ et $i_{w'} \circ \varphi$ sont isogrédients si, et seulement si il existe $g \in F_N$ tel que $i_{w'} \circ \varphi = i_g \circ i_w \circ \varphi \circ i_{g^{-1}}$. Ce qui équivaut, d'après notre calcul initial, à $i_{w'} = i_{gw\varphi(g^{-1})}$, et donc à $w' = gw\varphi(g^{-1})$ (puisque le centre de F_N est trivial). \square

2.2 Dynamique d'un automorphisme

Quelques éléments de dynamique

Soit f un homéomorphisme d'un compact K . On désigne par $\text{Fix } f$ l'ensemble des points fixes de f , et par $\text{Per } f$ l'ensemble des points périodiques de f . Soit $x \in \text{Per } f$; on dit que x est de période $q \geq 1$ si $f^q(x) = x$ et q est le plus petit entier non nul avec cette propriété. On dit que $\{x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)\}$ est une **orbite périodique d'ordre q** .

Périodicité asymptotique Soit $x \in K$. On définit l'**ensemble ω -limite** de x , que l'on note $\omega_f(x)$ (ou plus simplement $\omega(x)$ lorsque le contexte le permet), comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $f^p(x)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. C'est un compact, invariant par f et f^{-1} . Comme c'est indiqué dans le lemme 1.1 de [22], les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\omega(x)$ est fini, de cardinal q ,
- (ii) $\omega(x)$ est une orbite périodique d'ordre q ,
- (iii) la suite $f^{nq}(x)$ converge quand $n \rightarrow \infty$, et q est minimal pour cette propriété.

⁸On parle aussi de conjugaison tordue ; les classes de φ -conjugaison sont aussi appelées classes de Reidemeister - cf [35], [19].

Si ces conditions sont vérifiées, on dit, comme dans [22], que x est **asymptotiquement périodique**.

On dit que f a une **dynamique asymptotiquement périodique** si tout point $x \in K$ est asymptotiquement périodique. Remarquons que si $p \geq 2$, $\omega_f(x)$ est fini si, et seulement si $\omega_{f^p}(x)$ est fini. En particulier, f a une dynamique asymptotiquement périodique si, et seulement si une de ses puissances f^p ($p \geq 2$) a une dynamique asymptotiquement périodique.

Ensembles limites On définit l'**ensemble limite positif** de f , noté L_f^+ , comme la réunion des $\omega_f(x)$ pour $x \in \mathcal{U}_f = K \setminus \text{Per} f$. On définit l'**ensemble limite négatif** L_f^- de f comme $L_{f^{-1}}^+$. Enfin, on définit l'**ensemble limite** de f , noté L_f , comme la réunion de L_f^+ et de L_f^- .

Points attractifs et répulsifs Un point fixe x est dit **attractif** s'il existe un voisinage U de x dans K tel que

$$y \in U \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(y) = x.$$

Un point $x \in \text{Fix} f$ est dit **répulsif** s'il est attractif pour f^{-1} . Un point $x \in \text{Per} f$ de période q est dit attractif (resp. répulsif), si c'est un point fixe attractif (resp. répulsif) de f^q .

Dynamique d'un automorphisme

Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, et $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ sa classe extérieure. On s'intéresse à la dynamique de $\partial\varphi$ sur ∂F_N et de $\overline{\varphi}$ sur \overline{F}_N .

Points périodiques de $\overline{\varphi}$ Dans [24], les auteurs démontrent qu'il existe une constante M_N telle que si $x \in \overline{F}_N$ est un point périodique de $\overline{\varphi}$, de période q , alors $q \leq M_N$. De plus ils donnent une estimation de M_N : $\log M_N \sim \sqrt{N \log N}$ quand $N \rightarrow \infty$.

Remarque 1.4. On pourra donc toujours, quitte à remplacer φ par une puissance, supposer que tous les points périodiques de $\overline{\varphi}$ sont en fait des points fixes.

Points fixes au bord On désigne par $\text{Fix} \varphi$ le sous-groupe fixe de φ : $\text{Fix} \varphi = \{g \in F_N : \varphi(g) = g\}$. Un théorème de M. Bestvina et M. Handel (théorème 6.1 de [5]) montre que $\text{Fix} \varphi$ est de rang au plus N , démontrant la conjecture de Scott. Son bord $\partial \text{Fix} \varphi$ se plonge dans ∂F_N : c'est un sous-ensemble de $\text{Fix} \partial\varphi$. Un point fixe de $\partial\varphi$ est dit **singulier** s'il est dans $\partial \text{Fix} \varphi$, **régulier** sinon.

Soit $X \in \text{Fix} \partial\varphi$. Les propriétés suivantes sont équivalentes (cf proposition 1.1 de [12]) :

- X est un point fixe attractif de $\bar{\varphi}$;
- une base de F_N étant fixée et X étant le mot infini réduit $x_1x_2 \dots x_k \dots$, alors

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (\varphi(x_1 \dots x_p) | X) - p = +\infty.$$

On dit alors que X est un point attractif.

D'après la proposition 1.1 de [12], un point fixe de $\partial\varphi$ est :

- soit singulier,
- soit attractif,
- soit répulsif (ie attractif pour $\bar{\varphi}^{-1}$).

Remarque 1.5. Il y a une ambiguïté dans la terminologie due au fait qu'un point $X \in \partial F_N$ peut être un point fixe attractif de $\partial\varphi$, sans être un point fixe attractif de $\bar{\varphi}$. C'est le cas par exemple pour une conjugaison i_u ($u \in F_N$, $u \neq 1$) : $u^{+\infty}$ est un point singulier ; mais vu comme un point fixe de $\partial\varphi$ pour le système dynamique $(\partial F_N, \partial\varphi)$, $u^{+\infty}$ est attractif.

On note $\mathcal{A}(\varphi)$ (resp. $\mathcal{R}(\varphi)$) l'ensemble des points fixes attractifs (resp. répulsifs) de $\partial\varphi$.

De même, un point $X \in \text{Per} \partial\varphi$ sera dit singulier s'il est dans le bord du sous-groupe périodique $\text{Per} \varphi$. Un point de $\text{Per} \partial\varphi$ est soit singulier, soit attractif, soit répulsif.

Périodicité asymptotique Il est prouvé dans [22] (théorème II) que $\bar{\varphi}$ a une dynamique asymptotiquement périodique sur \bar{F}_N (et donc aussi que $\partial\varphi$ a une dynamique asymptotiquement périodique sur ∂F_N). De plus, si $x \in \bar{F}_N \setminus \text{Per} \varphi$, alors $\omega_{\bar{\varphi}}(x) \in \text{Per} \partial\varphi$.

Ensembles limites On peut considérer les ensembles limites positif et négatif, et l'ensemble limite de $\partial\varphi$ et $\bar{\varphi}$ (pour les compacts ∂F_N et \bar{F}_N respectivement). On définit aussi L_φ^+ , l'ensemble limite positif de φ , comme la réunion des $\omega_\varphi(g)$ pour $g \in \mathcal{U}_\varphi = F_N \setminus \text{Per} \varphi$: $L_\varphi^+ \subseteq \text{Fix} \partial\varphi$. On définit enfin l'ensemble limite négatif de φ : $L_\varphi^- = L_{\varphi^{-1}}^+$; et l'ensemble limite de φ : $L_\varphi = L_\varphi^+ \cup L_\varphi^-$.

Remarque 1.6. Comme cela est expliqué dans [23] (dans la preuve de la proposition 2.3), si $g \in \mathcal{U}_\varphi$, $\omega_\varphi(g) = \omega_{\partial\varphi}(g^\infty)$. En particulier :

- $L_\varphi^+ \subseteq L_{\partial\varphi}^+ = L_{\bar{\varphi}}^+$,
- $L_\varphi^- \subseteq L_{\partial\varphi}^- = L_{\bar{\varphi}}^-$,
- $L_\varphi \subseteq L_{\partial\varphi} = L_{\bar{\varphi}}$.

Remarque 1.7. Rappelons qu'un élément $x \in \overline{F}_N \setminus \text{Per}\varphi$ vérifie que $\omega_{\overline{\varphi}}(x) \in \text{Per}\partial\varphi$. En particulier L_{φ}^+ et $L_{\partial\varphi}^+$ sont des sous-ensembles de $\text{Per}\partial\varphi$. On vérifie facilement que $L_{\varphi}^+ = L_{\varphi^p}^+$ et $L_{\partial\varphi}^+ = L_{\partial\varphi^p}^+$ pour $p \geq 2$, et d'après la remarque 1.4, on peut choisir p de telle sorte que $\text{Per}\partial\varphi^p = \text{Fix}\partial\varphi^p$

quitte à remplacer φ par une puissance, on peut supposer que L_{φ}^+ et $L_{\partial\varphi}^+$ sont des sous-ensembles de $\text{Fix}\partial\varphi$.

Classes isoglosses Deux éléments $X, Y \in \partial F_N$ sont dits **isoglosses** s'il existe $g \in \text{Fix}\varphi$ tel que $X = gY$. L'isoglossie est une relation d'équivalence.

Remarquons que $\text{Fix}\varphi$ agit (par translation à gauche) sur $\text{Fix}\partial\varphi$, $\mathcal{A}(\varphi)$, $\mathcal{R}(\varphi)$, L_{φ}^{\pm} , $L_{\partial\varphi}^{\pm}$, L_{φ} , $L_{\partial\varphi}$: si X appartient à un de ces ensembles, alors la classe isoglosse de X est entièrement contenue dans cet ensemble.

Indice d'un automorphisme et d'un automorphisme extérieur On note $a(\varphi)$ le cardinal des classes isoglosses de $\mathcal{A}(\varphi)$. On définit alors l'indice de φ comme étant :

$$\text{ind}(\varphi) = \text{rgFix}(\varphi) + a(\varphi)/2 - 1.$$

Remarquons que l'indice d'un automorphisme φ ne dépend que de sa classe d'isogrédiences $[\varphi]$.

On définit l'indice de Φ comme étant :

$$\text{ind}(\Phi) = \sum_{[\varphi] \in \mathcal{I}(\Phi)} \max(0, \text{ind}(\varphi)).$$

Dans [12], les auteurs prouvent que $\text{ind}(\Phi) \leq N - 1$. Ce résultat redémontre en particulier la conjecture de Scott : $\text{rgFix}\varphi \leq N$.

3 Train-tracks

Les train-tracks (relatifs) sont des représentants topologiques efficaces des automorphismes extérieurs de F_N introduits par M. Bestvina et M. Handel dans [5], et rendus encore plus efficaces par la suite dans [3]. Je rappelle rapidement dans cette section leur définition et leurs propriétés qui me seront utiles.

3.1 Train-tracks relatifs

Définition

⁹ Soit $\Phi \in \text{Out}F_N$ et $f_0 : G \rightarrow G$ un représentant topologique ; on désigne par $e_{i1 \leq i \leq p}$ les arêtes de G . Une **filtration** est une suite croissante de sous-graphes de G f_0 -invariants : $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = G$. On définit la **strate** H_r comme l'adhérence dans G de $G_r \setminus G_{r-1}$. Si w est un chemin dans G , on définit la **hauteur** de w , que l'on note $\text{hauteur}(w)$, comme l'indice de la strate la plus haute non trivialement traversée par w . A chaque strate H_r , est associée une matrice carrée M_r , appelée **matrice de transition** : si e_i et e_j sont des arêtes de H_r , le coefficient i, j de M_r est le nombre de fois que l'image de $f_0(e_j)$ traverse $e_i^{\pm 1}$. Quitte à raffiner la filtration, on peut supposer que M_r est soit nulle, soit **irréductible** (ie pour tout i, j , il existe un entier $n > 0$ tel que le coefficient i, j de M_r^n est strictement positif). Dans le cas où M_r est irréductible, le théorème de Perron-Frobenius assure que M_r possède une valeur propre réelle $\lambda_r \geq 1$, telle que toutes les autres valeurs propres sont de module inférieur à λ_r . Si $M_r = 0$, on dit que H_r est une **strate nulle** ; si $\lambda_r = 1$, on dit que H_r est une **strate polynomiale** ; et si $\lambda_r > 1$, on dit que H_r est une **strate exponentielle**.

Un **tournant** de G est une paire $\{e, e'\}$ d'arêtes qui ont même sommet initial. Si $e = e'$, on dit que le tournant $\{e, e'\}$ est **dégénéré**. Pour toute arête e de G , on définit $Tf_0(e)$ comme la première arête de $f_0(e)$. Un tournant $\{e, e'\}$ est **illégal** s'il existe $k \geq 1$ tel que $\{(Tf_0)^k(e), (Tf_0)^k(e')\}$ est dégénéré, **légal** sinon. On dit que le tournant $\{e, e'\}$ est contenu dans G_r (resp. H_r) si e et e' sont dans G_r (resp. H_r). On dit qu'un chemin w de G contient le tournant $\{e, e'\}$ si ee'^{-1} ou $e'e^{-1}$ est un sous-chemin de w .

Soit w un chemin dans G . On dit que w est **légal** s'il ne contient que des tournants légaux (en particulier, $f_0^k(w) = f_{0\#}^k(w)$ pour tout $k \geq 1$). On dit que w est **r -légal** si w est contenu dans G_r et ses tournants illégaux sont dans G_{r-1} .

On dit qu'un représentant topologique $f_0 : G \rightarrow G$, muni d'une filtration $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = G$, est un **train-track relatif** si G ne possède pas de sommet de valence 1, chaque strate non nulle est irréductible, et chaque strate exponentielle H_r vérifie les conditions suivantes :

- (i) si e est une arête de H_r , la première arête de $f_0(e)$ est une arête de H_r ;
- (ii) si w est un chemin non trivial dont les extrémités sont dans $G_{r-1} \cap H_r$, alors $f_{0\#}(w)$ est non trivial ;
- (iii) si w est un chemin légal contenu dans H_r , alors $f_0(w)$ est un chemin r -légal.

⁹La référence pour cette partie est [5] ; on peut aussi consulter la section 2.5 de [2]

Le théorème 5.12 de [5] affirme que tout automorphisme extérieur de F_N possède un représentant topologique qui est un train-track relatif. Ces train-tracks relatifs sont introduits dans [5] pour prouver la conjecture de Scott : si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, alors $\text{rgFix}\varphi \leq N$. En fait, ils permettent plus généralement de contrôler le comportement dynamique d'un automorphisme extérieur de F_N . Dans [3], les auteurs sont amenés à introduire des train-tracks relatifs améliorés : cela leur permet notamment de prouver que le groupe $\text{Out}(F_N)$ vérifie l'alternative de Tits (cf [3], [1]) : tout sous-groupe de $\text{Out}(F_N)$ soit contient un sous-groupe libre de rang 2, soit est virtuellement résoluble (en fait virtuellement abélien - cf [4]).

Croissance d'un chemin

Soit $f_0 : G \rightarrow G$ une équivalence d'homotopie de graphe telle que l'image d'un sommet est un sommet.

Si x est un chemin dans G dont les extrémités sont des sommets, on dit que x est à croissance polynomiale s'il existe un polynôme P tel que

$$|f_{0\#}^k(x)| \leq P(k) \text{ pour tout } k \geq 1. \quad (1.1)$$

Dans ce cas, on dit que x est à croissance polynomiale de degré $d \geq 1$ s'il n'existe pas de polynôme de degré $d - 1$ vérifiant (1.1). On dit que x est à croissance nulle si x est un pré-chemin de Nielsen (cf lemme 1.11).

On peut montrer que si $f_0 : G \rightarrow G$ est un train-track, un chemin x de G qui n'est pas à croissance polynomiale est à croissance exponentielle : ie il existe $\lambda > 1$ et $K \geq 1$ tel que pour $k \geq K$, $|f_{0\#}^k(x)| \geq \lambda^k$.

3.2 Train-tracks relatifs améliorés

J'aurai par la suite besoin d'utiliser certaines propriétés spécifiques des train-tracks relatifs améliorés, que je rappelle ci-après. Mais auparavant, il me faut introduire quelques nouvelles notions.

Systèmes de facteurs libres

¹⁰ Considérons F^1, F^2, \dots, F^p des facteurs libres non triviaux de F_N tels que $F^1 * F^2 * \dots * F^p$ soit un facteur libre de F_N , et désignons par $[[F^i]]$ la classe de conjugaison de F^i dans F_N . On dit alors que $\mathcal{F} = \{[[F^1]], [[F^2]], \dots, [[F^p]]\}$ est un **système de facteurs libres** de F_N .

¹⁰Je renvoie le lecteur à la section 2.6 de [3], que je reprends presque mot pour mot, où cette notion est introduite et discutée en détails.

Soit G est un graphe marqué, K un sous-graphe de G , C_1, C_2, \dots, C_p les composantes connexes de K , et $v_i \in C_i$. Si l'on pose $F^i = \pi_1(C_i, v_i)$, alors $\mathcal{F}(K) = \{[[F^1]], [[F^2]], \dots, [[F^p]]\}$ est un système de facteurs libres de F_N . On dit que ce système de facteurs libres est **réalisé par** K .

Chemins basiques et chemins exceptionnels

¹¹ Si H_i est une strate polynomiale, constituée d'une seule arête e telle que $f(e) = eu$ où u est un chemin, on appelle **chemin basique de hauteur i** (ou **chemin basique relatif à e**) tout chemin de la forme ew , we^{-1} ou ewe^{-1} où w est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$.

On appelle **chemin exceptionnel** de G tout chemin de la forme $e'u^ae^{-1}$ où :

- $a \in \mathbb{Z}$,
- u est un lacet irréductible, de Nielsen, non trivial,
- e et e' sont des arêtes de G (éventuellement confondues, et dans ce cas $a \neq 0$) telles que $f_0(e) = eu^c$, $f_0(e') = eu^{c'}$, $c, c' \in \mathbb{Z}$, $cc' \neq 0$.

Si $i = \text{hauteur}(e) \geq \text{hauteur}(e')$ (resp. $i = \text{hauteur}(e') \geq \text{hauteur}(e)$), on dit que $e'u^ae^{-1}$ est un chemin exceptionnel de hauteur i ou relatif à e (resp. relatif à e').

Remarquons que $f_{0\#}^k(e'u^ae^{-1}) = e'u^{a+k(c'-c)}e^{-1}$. En particulier $e'u^ae^{-1}$ est un chemin de Nielsen si, et seulement si $c = c'$.

Train-tracks relatifs améliorés

Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track représentant Φ , $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = G$ la filtration en sous-graphes f_0 -invariants associée.

Si H_i est une strate polynomiale, on considère les propriétés suivantes :

- p-(i) H_i est constituée d'une seule arête e_i ;
- p-(ii) $f_0(e_i) = e_i \cdot u_i$ où u_i (appelé **twisteur** de l'arête e_i) est un lacet dans G_{i-1} dont le point de base est laissé fixe par f_0 ;

Lorsque le twisteur u_i de l'arête e_i est non trivial, la suite $[f_0^k(e_i)] = e_i \cdot u_i \cdot f_{0\#}(u_i) \cdot \dots \cdot f_{0\#}^{k-1}(u_i)$, que l'on note $R_{e_i}^k$, converge vers le rayon $R_{e_i} = e_i \cdot u_i \cdot f_{0\#}(u_i) \cdot \dots \cdot f_{0\#}^{k-1}(u_i) \cdot \dots$, que l'on appelle **rayon propre** de l'arête e_i . Un relevé \tilde{R}_{e_i} de R_{e_i} au revêtement universel \tilde{G} de G sera aussi appelé rayon propre. Les chemins $f_{0\#}^k(u_i)$, et leurs relevés, sont appelés des **blocs**.

- p-(iii) si w est un chemin basique de hauteur i qui ne se scinde pas en deux chemins basiques de hauteur i ou en un chemin basique de hauteur i et un chemin contenu dans G_{i-1} , alors :

¹¹Ici encore, je renvoie le lecteur aux sections 4.1 et 5.1 de [3] où ces notions sont introduites.

- soit il existe un itéré $f_{0\#}^k(w)$ qui admet un scindement dont une brique est $e_i^{\pm 1}$;
- soit u_i est un chemin de Nielsen et il existe un itéré $f_{0\#}^k(w)$ qui est un chemin exceptionnel de hauteur i .

Si H_i est une strate exponentielle, on considère la propriété :

- e-(i) il y a au plus un chemin de Nielsen indivisible $\eta_i \subset G_i$ qui intersecte H_i non trivialement ; les arêtes initiales de η_i et η_i^{-1} sont des arêtes (éventuellement partielles) distinctes de H_i .

Théorème 1.8 (Bestvina, Feighn, Handel). Soit Φ un automorphisme extérieur de F_N , et \mathcal{F} un système de facteurs libres Φ -invariant. Il existe un train-track $f_0 : G \rightarrow G$ muni d'une filtration $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_m = G$, représentant une puissance de Φ , qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G_r)$ pour un certain élément G_r de la filtration ;
- tout chemin de Nielsen périodique est de période un ;
- si v est un sommet de G , alors $f_0(v)$ est un point fixe de f_0 ;
- si H_i est une strate polynomiale, alors H_i vérifie les propriétés p-(i), p-(ii) et p-(iii) ;
- si H_i est une strate exponentielle, alors H_i vérifie la propriété e-(i).

Le théorème 1.8 est un cas particulier du théorème 5.1.5 de [3], qui spécifie notamment la structure des strates exponentielles et des strates nulles. Un représentant topologique satisfaisant les conclusions du théorème 1.8 sera appelé un **train-track relatif amélioré**.

A propos de la propriété p-(iii)

L'existence de représentants topologiques qui ont la propriété p-(iii) repose notamment sur un résultat technique que nous serons amenés à utiliser sous la forme suivante :

Lemme 1.9. Soit e, e' deux arêtes (éventuellement confondues) de strates polynomiales de G , et $e'we^{-1}$ un chemin. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel qu'au moins trois blocs de e et trois blocs de e' sont simplifiés lorsque l'on tend $f_0^k(e')f_0^k(w)f_0^k(e^{-1})$ pour obtenir $f_{0\#}^k(e'we^{-1})$, alors $e'we^{-1}$ est un chemin exceptionnel.

Preuve. Ce lemme est la traduction directe du sous-lemme 1 dans le point 3 de la démonstration du lemme 5.5.1 de [3], et de son analogue dans le point 4 de la même démonstration. \square

Scindement relatif à une arête e polynomiale

Considérons H_i une strate polynomiale constituée d'une seule arête e_i , et x un chemin de G de hauteur i . Alors x se scinde au point initial de l'arête e_i (resp. au point terminal de l'arête e_i^{-1}) chaque fois qu'il la traverse. Le scindement $x = \dots \cdot x_l \cdot x_{l+1} \cdot \dots$ ainsi obtenu est appelé **scindement de hauteur i** de x .

Chaque brique du scindement de hauteur i de x est un chemin basique de hauteur i . De plus, si x_l et x_{l+1} sont deux briques consécutives, alors une (et une seule) des deux conditions suivantes est vérifiée :

- la dernière brique de x_l est e_i^{-1} ,
- la première brique de x_{l+1} est e_i .

En fait, ces propriétés caractérisent le scindement de hauteur i de x .

Pré-chemins de Nielsen

Soit $f_0 : G \rightarrow G$ une équivalence d'homotopie telle que l'image d'un sommet est un sommet. On dit qu'un chemin w dans G est un **pré-chemin de Nielsen** (périodique) s'il existe un entier k tel que $f_{0\#}^k(w)$ soit un chemin de Nielsen (périodique). L'existence de strates nulles dans un train-track a pour conséquence qu'il peut exister des pré-chemins de Nielsen qui ne sont pas des chemins de Nielsen.

Remarque 1.10. Si w est un pré-chemin de Nielsen dont les extrémités sont des points fixes de f_0 , alors w est un chemin de Nielsen. En effet, on désigne par v_0 le sommet initial de w , et on considère le lacet $u = [wf_{0\#}^k(w)^{-1}]$; alors $f_{0\#}^k(u)$ est le lacet trivial pointé en v_0 . Donc u est le lacet trivial pointé en v_0 (puisque f_0 est une équivalence d'homotopie), ie w est un chemin de Nielsen. En particulier, d'après le théorème 1.8, si $f_0 : G \rightarrow G$ est un train-track relatif amélioré et w un pré-chemin de Nielsen dont les extrémités sont des sommets, alors $f_{0\#}^k(w)$ est un chemin de Nielsen.

Lemme 1.11. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ une équivalence d'homotopie de graphe telle que l'image d'un sommet est un sommet, et w un chemin de G dont les extrémités sont des sommets. Alors :

- $|f_{0\#}^k(w)|$ est bornée si, et seulement si w est un pré-chemin de Nielsen,
- sinon, $|f_{0\#}^k(w)|$ tend vers $+\infty$.

Preuve. Remarquons que $k \mapsto f_{0\#}^k(w)$ n'est pas injective si, et seulement si il existe $p, q > 0$ tels que $f_{0\#}^{p+q}(w) = f_{0\#}^p(w)$, ce qui équivaut au fait que $f_{0\#}^p(w)$ est un chemin de Nielsen q -périodique, ie au fait que w est pré-chemin de Nielsen.

Remarquons aussi que si $M > 0$, il n'y a qu'un nombre fini de chemins dont les extrémités sont des sommets et de longueur inférieure à M . Donc si $|f_{0\#}^k(w)|$ est

bornée, alors $k \mapsto f_{0\#}^k(w)$ n'est pas injective. Réciproquement, si $k \mapsto f_{0\#}^k(w)$ n'est pas injective, alors w est pré-chemin de Nielsen, et donc $|f_{0\#}^k(w)|$ est bornée.

Enfin, si $k \mapsto f_{0\#}^k(w)$ est injective, alors $|f_{0\#}^k(w)|$ tend vers $+\infty$ puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de chemins dont les extrémités sont des sommets et de longueur bornée. \square

Chapitre 2

Propriétés de finitude de l'ensemble limite

1 Arbre φ -invariant.

1.1 Arbres réels

Je commence par rappeler rapidement la définition et quelques propriétés élémentaires des arbres réels que je serai amené à utiliser par la suite.

Définition

Un **arbre réel** T est un espace métrique tel que pour tous $x, y \in T$, il existe un unique arc reliant x à y , et cet arc est isométrique au segment $[0, d(x, y)]$ (où d désigne la distance sur T) ; on désigne cet arc par $[x, y]$. De manière équivalente, on peut définir un arbre réel comme un espace métrique géodésique 0-hyperbolique (cf [8] ou [15]).

Bord d'un arbre réel

Un **rayon** de T est l'image d'un chemin, isométrique à $[0, +\infty[$. Deux rayons dans T sont dit équivalents si leur intersection est encore un rayon. Le **bord** de T en tant qu'espace hyperbolique (au sens de Gromov) est noté ∂T : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons dans T .

Soit v_0 un point de T . On définit le **bord visuel** de T vu de v_0 , que l'on note $\partial_{v_0} T$, comme l'ensemble des rayons pointés en v_0 . L'application naturelle $\partial_{v_0} T \rightarrow \partial T$ qui associe à un rayon pointé en v_0 sa classe, est une bijection (cf [8] ou [15]).

Complétion métrique d'un arbre réel

Lorsqu'un arbre réel T n'est pas complet, on peut considérer sa complétion métrique : c'est encore un arbre réel, que l'on note \overline{T} . Attirons l'attention sur deux faits élémentaires :

- un point $v \in \overline{T} \setminus T$ est un point extrémal de \overline{T} (ie $\overline{T} \setminus \{v\}$ est connexe);
- l'injection de T dans \overline{T} se prolonge en l'identité sur les bords : autrement dit, $\partial T = \partial \overline{T}$.

1.2 Arbre φ -invariant

L'outil essentiel pour étudier la dynamique au bord d'un automorphisme φ de F_N est un arbre réel " φ -invariant" dont une construction peut être trouvée dans [14] ou [12]. Cet arbre φ -invariant a été étudié plus en détail par G. Levitt et M. Lustig selon les besoins dans une série d'articles ([24],[22],[25]). Le théorème 2.1 regroupe les propriétés connues d'un tel arbre que l'on trouve dans les références susmentionnées, le plus souvent sous forme de lemme, proposition ou théorème, mais qui doivent parfois être glanées au cours de la lecture de ces articles : je donne par la suite des références précises.

Théorème 2.1. Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. Il existe un arbre réel T possédant les propriétés suivantes.

- (i) F_N agit sur T par isométries. L'action est non triviale, minimale, et les stabilisateurs d'arcs sont triviaux.
- (ii) Il existe $\lambda \geq 1$ et une homothétie $\mathcal{H} : T \rightarrow T$ de rapport λ tels que

$$\varphi(g)\mathcal{H} = \mathcal{H}g \text{ pour tout } g \in F_N;$$

on dit que \mathcal{H} est **couplée à φ** . En particulier, si Q_0 est un point fixe de \mathcal{H} , alors $\text{Stab}Q_0$ est φ -invariant.

- (iii) Soit $Q \in T$. Alors le stabilisateur de Q dans F_N agit naturellement sur les composantes connexes de $T \setminus \{Q\}$. Si l'on désigne par r le rang de $\text{Stab}Q$, et par v le nombre de $\text{Stab}Q$ -orbites de $\pi_0(T \setminus \{Q\})$, on a :

$$2r + v \leq 2N.$$

De plus, il y a au plus $2N - 2$ F_N -orbites de points de branchement de T .

Un **rayon propre** est (l'image d') une isométrie $\rho : [0, +\infty[\rightarrow \overline{T}$ telle que $\rho(\lambda t) = \mathcal{H}(\rho(t))$.

- (iv) Il existe une injection F_N -équivariante $j : \partial T \rightarrow \partial F_N$ qui vérifie $\partial\varphi \circ j = j \circ \mathcal{H}$. En particulier, si ρ est un rayon propre, $j(\rho)$ est un point fixe attractif de $\overline{\varphi}$.
- (v) Si $\lambda = 1$:
 - (a) T peut-être pris simplicial, avec une seule orbite d'arêtes sous l'action de F_N .
 - (b) il existe une constante M (qui ne dépend que de N) telle que tout point périodique de \mathcal{H} est de période inférieure à M ; l'ensemble des points périodiques de \mathcal{H} forme un sous-arbre \mathcal{H} -invariant;
- (vi) Si $\lambda > 1$:
 - (a) l'orbite sous l'action de F_N d'un point de T est dense;
 - (b) l'homothétie \mathcal{H} possède un unique point périodique $Q_0 \in \overline{T}$, qui est en fait un point fixe; si \mathcal{C} est une composante connexe de $T \setminus \{Q_0\}$ laissée fixe par \mathcal{H} , alors \mathcal{C} possède un unique rayon propre $\rho_{\mathcal{C}}$;
 - (c) si X est un point fixe de $\partial\varphi$ dans l'image de j , alors X est l'image d'un rayon propre, et en particulier, $X \in \mathcal{A}(\varphi)$;
 - (d) il existe une surjection F_N -équivariante $Q : \overline{F}_N \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$ dont la restriction $Q| : Q^{-1}(\partial T) \rightarrow \partial T$ est une bijection d'inverse j ;

Un tel arbre sera désormais appelé **arbre φ -invariant**. Sa fonction longueur $\ell : F_N \rightarrow [0, +\infty[$ satisfait $\ell \circ \varphi = \lambda\varphi$ (rappelons que $\ell(g) = \min\{d(x, gx) | x \in T\}$).

Une construction d'un tel arbre φ -invariant se trouve dans [12] : les propriétés (i), (ii) et (v)-(a) y sont démontrées dans le théorème 2.1, la propriété (iv) en constitue le lemme 3.5, les propriétés (vi)-(a,b,c) y sont établies dans la partie 4. La propriété (iii) est démontrée dans [13] (dans le théorème III.2 et ses corollaires). La propriété (v)-(b) constitue le lemme 4.3 de [22].

Lorsque $\lambda > 1$, la construction d'une surjection F_N -équivariante $Q : \partial F_N \rightarrow \overline{T} \cup \partial T$ dont la restriction $Q| : Q^{-1}(\partial T) \rightarrow \partial T$ est une bijection d'inverse j est expliquée dans la partie 2 de [25]; pour obtenir (vi)-(d), on prolonge cette application à F_N en posant $Q(g) = gQ_0$ pour tout $g \in F_N$.

Remarque 2.2. Quitte à prendre une puissance de φ , on peut représenter l'automorphisme extérieur Φ par un train-track relatif amélioré $f_0 : G \rightarrow G$. Si la strate supérieure de G est exponentielle, la construction standard par un "procédé limite" (cf [12]) d'un arbre φ -invariant à partir du train-track relatif donne un arbre réel T non simplicial, et une homothétie de rapport $\lambda > 1$ couplée à φ . Sinon, la strate supérieure de G est polynomiale, constituée d'une seule arête e ; on peut construire plus simplement un arbre φ -invariant T de la manière suivante : on contracte dans le revêtement universel \tilde{G} de G toutes les arêtes qui ne sont pas des relevés e . On

désigne par $\sigma : \tilde{G} \rightarrow T$ l'application ainsi obtenue. Par construction, T est un arbre simplicial, et possède une seule orbite d'arête. Si $v \in T$, on choisit un point $v' \in \sigma^{-1}(v)$, et on pose $\mathcal{H}(v) = \sigma \circ f(v')$, où f est le relevé de f_0 à \tilde{G} couplé à φ ; bien sûr, cette construction ne dépend pas du point v' choisi dans l'image réciproque de v . On voit facilement que \mathcal{H} est une isométrie, couplée à φ .

La preuve du résultat principal de ce chapitre (le théorème 2.15) concernant la finitude des classes isoglosses de points d'accumulations d'un automorphisme φ (et de $\partial\varphi$) repose sur une étude approfondie de l'arbre φ -invariant. Mais dans un premier temps, je vais étudier plus en détail les chemins à croissance au plus linéaire dans un train-track représentant Φ .

2 Chemins à croissance linéaire dans les train-tracks relatifs améliorés

2.1 Avenir des chemins de hauteur i , lorsque H_i est une strate polynomiale

On considère un chemin fini w de hauteur i dans G , et son scindement de hauteur i : les points de scindement sont des sommets initiaux (resp. terminaux) des arêtes e_i (resp. e_i^{-1}) traversées par w , et les briques des chemins basiques de hauteur i ou des chemins de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$. Le lemme suivant permet de comprendre l'avenir d'un chemin basique lorsqu'on itère $f_{0\#}$.

Lemme 2.3. Si H_i est polynomiale, et w un chemin basique de hauteur i dans G , alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w)$ se scinde en briques qui sont :

- soit l'arête $e_i^{\pm 1}$,
- soit un chemin exceptionnel de hauteur i ,
- soit un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$.

De plus, les points du scindement obtenu sont tous des sommets.

Preuve. Remarquons tout d'abord que, quitte à regrouper deux briques successives quand elles sont toutes les deux des chemins de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$, les points du scindement de $f_{0\#}^K(w)$ obtenu sont tous des sommets, puisque les extrémités de e_i et des chemins exceptionnels de hauteur i sont des sommets.

Supposons tout d'abord que $w = e_i w'$ où w' est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$ (le cas où $w = w' e_i^{-1}$ se traite de la même façon, en considérant w^{-1}). Si w ne possède pas de point de scindement à l'intérieur de w' , la propriété p-(iii) assure que :

- soit il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w) = e_i \cdot m$ où m est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$,
- soit il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w)$ est un chemin exceptionnel de hauteur i .

Si w possède un point de scindement à l'intérieur de w' , considérons la borne inférieure p des points de scindement de w à l'intérieur de w' : c'est encore un point de scindement de w (puisque l'ensemble des points de scindement d'un chemin de G est fermé d'après le lemme 4.1.1 de [3]). Si p est le point terminal de e_i , le lemme est vérifié avec $K = 1$. Sinon p détermine un scindement $w = e_i w'_1 \cdot w'_2$, et $e_i w'_1$ ne se scinde pas en un chemin basique de hauteur i et un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$. Dans ce cas, la propriété p-(iii) assure que l'on est dans une des deux situations suivantes.

- Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(e_i w'_1) = e_i \cdot m$ où m est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$. Alors $f_{0\#}^K(w) = e_i \cdot m'$ où $m' = m f_{0\#}^K(w'_2)$ est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$.
- Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $m_1 = f_{0\#}^K(e_i w'_1)$ est un chemin exceptionnel de hauteur i . Alors $f_{0\#}^K(w) = m_1 \cdot m_2$ où $m_2 = f_{\#}^K(w'_2)$ est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$.

Supposons maintenant que $w = e_i w' e_i^{-1}$ où w' est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$. Si w possède un point de scindement dans w' , on est ramené au cas précédent. Sinon, d'après la propriété p-(iii) :

- soit il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w) = e_i \cdot m e_i^{-1}$ ou $f_{\#}^K(w) = e_i m \cdot e_i^{-1}$, avec m un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$; on est encore ramené au cas précédent ;
- soit il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w)$ est un chemin exceptionnel de hauteur i .¹

□

Corollaire 2.4. Si H_i est polynomiale, et w un chemin fini de hauteur i dans G , alors il existe $K \geq 1$ tel que $f_{0\#}^K(w)$ se scinde en briques qui sont :

- soit l'arête $e_i^{\pm 1}$,
- soit un chemin exceptionnel de hauteur i ,
- soit un chemin de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$.

De plus, les points du scindement obtenu sont tous des sommets.

Preuve. Considérons le scindement de hauteur i de w : les briques sont des chemins basiques de hauteur i ou des chemins de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$. Comme w est fini, il n'y a qu'un nombre fini de briques. On applique alors le lemme 2.3 à

¹En fait $K = 0$ dans ce cas, d'après le lemme 5.5.1 de [3].

chacune des briques qui est un chemin basique de hauteur i , et ensuite on regroupe deux briques successives quand elles sont toutes les deux des chemins de hauteur inférieure ou égale à $i - 1$. \square

2.2 Chemins à croissance linéaire

Définition 2.5. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré. On appelle chemin linéaire élémentaire tout chemin de la forme :

- une arête e ou e^{-1} d'une strate polynomiale dont le twisteur est un chemin de Nielsen non trivial,
- ou un chemin exceptionnel qui n'est pas un chemin de Nielsen.

Remarque 2.6. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré. Alors les chemins linéaires élémentaires sont à croissance linéaire. Plus précisément, une arête d'une strate polynomiale de G (resp. un chemin exceptionnel de G) est un chemin linéaire élémentaire si, et seulement si elle (resp. il) est à croissance linéaire.

En effet, considérons une arête e d'une strate polynomiale de G , et son twisteur u . Alors $f_{0\#}^k(e) = e \cdot u \cdot f_{0\#}(u) \cdot \dots \cdot f_{0\#}^{k-1}(u)$. Donc e est à croissance linéaire (resp. nulle) si, et seulement si son twisteur est un chemin de Nielsen non trivial (resp. un chemin trivial).

Si w est un chemin exceptionnel, alors $w = eu^ae'^{-1}$ avec u un lacet irréductible, non trivial, de Nielsen, $f_0(e) = e \cdot u^c$, $f_0(e') = e' \cdot u^{c'}$ avec $a, c, c' \in \mathbb{Z}$, $cc' \neq 0$. Alors $f_{0\#}^k(w) = eu^{a+k(c-c')}e'^{-1}$. En particulier :

- w est un chemin de Nielsen si, et seulement si $c = c'$,
- w est à croissance linéaire si, et seulement si, $c \neq c'$.

Proposition 2.7. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré. Si w est un chemin fini de G dont les extrémités sont des sommets, à croissance au plus linéaire, alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w)$ possède un scindement dont les points de scindement sont des sommets et dont chaque brique est :

- soit un chemin de Nielsen,
- soit un chemin linéaire élémentaire.

De plus w est à croissance exactement linéaire si, et seulement si, au moins une de ces briques est un chemin linéaire élémentaire.

Preuve. Remarquons tout d'abord que s'il existe K tel que $f_{0\#}^K(w)$ possède un scindement, alors w est à croissance au plus linéaire si, et seulement si toutes les briques du scindement sont à croissance au plus linéaire.

La preuve de la proposition se fait par récurrence sur la hauteur de w . Si w est de hauteur nulle, ie w est trivial, il n'y a rien à montrer. Supposons que la

proposition soit vraie pour les chemins de hauteur au plus $r - 1$, et considérons un chemin w de hauteur r .

Si H_r est nulle, $f_0(w)$ est un chemin de hauteur inférieure ou égale à $r - 1$, et on conclut par récurrence.

Si H_r est polynomiale, elle est constituée d'une seule arête e_r et $f(e_r) = e_r \cdot u_r$. D'après le corollaire 2.4, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $f_{0\#}^K(w)$ possède un scindement dont les briques sont soit des relevés d'arêtes $e_r^{\pm 1}$, soit des chemins exceptionnels de hauteur r , soit des chemins de hauteur inférieure ou égale à $r - 1$ dont les extrémités sont des sommets. Pour ce dernier type de briques, on conclut par récurrence. D'après la remarque 2.6, une brique d'un des deux autres types qui n'est pas un chemin de Nielsen, est un chemin linéaire élémentaire.

Si H_r est exponentielle, il existe K tel que $f_{\#}^K(w)$ admette un scindement dont les briques sont soit des chemins r -légaux, soit le chemin de Nielsen $\eta_r^{\pm 1}$ de la strate H_r s'il existe (cf lemme 3.2 de [26] ou lemme 6.1 de [22] ou lemme 4.2.6 de [3]). On regroupe deux briques successives si elles sont toutes les deux de la forme η_r ou η_r^{-1} ou r -légales. Remarquons qu'il ne peut y avoir de brique r -légale de hauteur r , car une telle brique serait à croissance exponentielle. On obtient donc un scindement dont les briques sont alternativement de la forme η_r^k ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) et des chemins de hauteur inférieure ou égale à $r - 1$. D'après la propriété e-(i) des train-tracks relatifs améliorés, les extrémités de η_r , et donc aussi celles d'une brique de la forme η_r^k , sont dans H_r . Puisqu'une brique précédant ou suivant une brique de la forme η_r^k est dans G_{r-1} , on en déduit que les points du scindement obtenu sont des sommets (dans $H_r \cap G_{r-1}$). Enfin, pour les briques de hauteur inférieure ou égale à $r - 1$, on conclut par récurrence. \square

2.3 Un lemme ferroviaire.

Le lemme suivant nous sera utile pour démontrer le théorème 2.10.

Lemme 2.8. Soit $f_0 : G \rightarrow G$, w un chemin de Nielsen dont les extrémités sont des sommets, m un chemin dont les extrémités sont des sommets tel que $w' = [f_{0\#}(m)wm^{-1}]$ soit un chemin de Nielsen ². Si m n'est pas un chemin de Nielsen, alors il existe un chemin de Nielsen m_0 , et une arête e d'une strate polynomiale, dont le twisteur u_e est un chemin de Nielsen, tels que w est de la forme $[m_0w_0m_0^{-1}]$ avec :

- $w_0 = u^d$,
- ou $w_0 = eu^de^{-1}$,

où $d \in \mathbb{Z}$ et u désigne le lacet irréductible dont u_e est une puissance.

²Voir figure 1.

Preuve. En effet, $f_0^k(w') = f_0^{k+1}(m)w f_0^k(m)^{-1}$, et donc $[w'^{k+1}] = [f_0^k(w') \dots f_0(w')w'] = [f_0^{k+1}(m)w^k m^{-1}]$, ie $f_0^{k+1}(m) = [w'^{k+1} m w^{-k-1}]$. En particulier, m est à croissance au plus linéaire. Puisque $w' = f_0^k(w') = [f_0^{k+1}(m)w f_0^k(m)^{-1}]$, on peut remplacer m par $f_0^k(m)$. D'après la proposition 2.7, quitte à choisir k suffisamment grand, on peut donc supposer que m se scinde en briques qui sont soit des chemins de Nielsen, soit des chemins linéaires élémentaires.

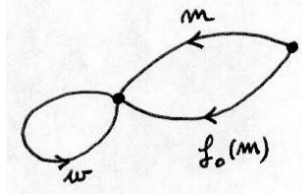


Fig. 1 - $w' = [f_0^\#(m)wm^{-1}]$

Supposons que m ne soit pas un chemin de Nielsen, et notons b la dernière brique de m qui ne soit pas un chemin de Nielsen, m_1 le sous-chemin initial de m précédant b , m_0 le sous-chemin initial de m^{-1} précédant b^{-1} . On a donc $m = m_1 \cdot b \cdot m_0^{-1}$, où m_0 est un chemin de Nielsen, et b un chemin linéaire élémentaire :

- $b = e$,
- ou $b = e^{-1}$,
- ou $b = e'u^a e^{-1}$,

où u est un lacet irréductible, non trivial, de Nielsen, et e est une arête telle que $f_0(e) = eu^c$ avec $c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, et dans le troisième cas, e' une arête telle que $f_0(e') = e'u^{c'}$, $c' \in \mathbb{Z}$, $c' \neq 0$ et $c \neq c'$ (en particulier, e et e' sont distinctes) - cf remarque 2.6.

Remarquons que :

$$\text{si } b = e, \quad f_0^k(b) = e \cdot u^{kc}, \quad (2.1)$$

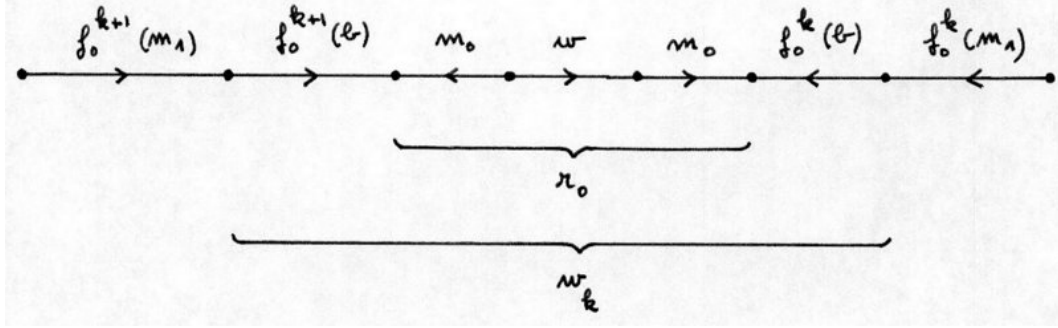
$$\text{si } b = e'u^a e^{-1}, \quad f_0^k(b) = e'u^{a+k(c'-c)} e^{-1}. \quad (2.2)$$

Posons $r_0 = [m_0^{-1}wm_0]$, et $w_k = [f_0^{k+1}(b)r_0 f_0^k(b^{-1})]$. Bien entendu, r_0 est un chemin de Nielsen (trivial si, et seulement si w est trivial), et $w' = f_0^k(w') = [f_0^{k+1}(m_1)w_k f_0^k(m_1^{-1})]$. La figure 2 schématise la situation.

1^{ère} étape : montrons que $[f_0(b)r_0 b^{-1}]$ est un chemin de Nielsen (ie w_k est constante).

Commençons par remarquer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$:

$$|f_0^{k+1}(b)| - |f_0^k(b)| \leq M. \quad (2.3)$$

Fig. 2 – Représentation schématique de w_k

Si $b = e^{\pm 1}$, d'après 2.1, il suffit de prendre $M = |c||u|$, et si $b = e'u^ae^{-1}$, d'après 2.2, il suffit de prendre $M = |c - c'||u|$.

Si, lorsqu'on tend $f_{0\#}^{k+1}(b)[r_0 f_{0\#}^k(b)]$ pour obtenir w_k , la simplification entre $f_{0\#}^{k+1}(b)$ et $[r_0 f_{0\#}^k(b)]$ est complète, alors $|w_k| \leq M + |r_0|$. Sinon, la première (resp. la dernière) arête de w_k est la première (resp. la dernière) arête de $f_0^{k+1}(b)$ (resp. $f_0^k(b^{-1})$). L'existence du scindement $m_1 \cdot b$ assure alors qu'il n'y a pas de simplification entre $f_{0\#}^{k+1}(m_1)$ et w_k , ni entre w_k et $f_{0\#}^k(m_1^{-1})$ lorsqu'on tend $f_{0\#}^{k+1}(m_1)w_k f_{0\#}^k(m_1^{-1})$ pour obtenir w' . C'est-à-dire que w_k est un sous-chemin de w' ; en particulier, $|w_k| \leq |w'|$.

Finalement $|w_k|$ est bornée par $\max(M + |r_0|, |w'|)$. Le lemme 1.11 assure alors que $[f_0(b)r_0 b^{-1}]$ est un pré-chemin de Nielsen.

Remarquons que le point initial de $f_{0\#}(b)$ est le même que celui de b (c'est clair si $b = e$ ou $e'u^ae^{-1}$, et si $b = e^{-1}$, cela résulte du fait que u est un lacet). Par conséquent $[f_0(b)r_0 b^{-1}]$ est un lacet pointé au point initial de b . Puisque ce point est fixé par f_0 , $[f_0(b)r_0 b^{-1}]$ est en fait un chemin de Nielsen (cf remarque 1.10).

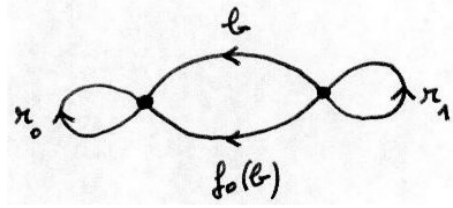
2^{de} étape. On pose $r_1 = [f_0(m_1^{-1})w'm_1]$. On est donc ramené à la situation suivante :

$$r_0 = [f_0(b^{-1})r_1 b] \quad \text{ou encore} \quad r_1 = [f_0(b)r_0 b^{-1}],$$

où r_0 et r_1 sont des chemins de Nielsen (voir figure 3). Discutons maintenant selon la nature de la brique linéaire élémentaire b .

Plaçons-nous pour commencer dans le cas où $b = e$. Alors $r_1 = [ere^{-1}]$ avec $r = [u^c r_0]$; en particulier, r_1 est trivial si, et seulement si r est trivial. Rappelons que $r_1 = f_{0\#}^k(r_1) = [eu^{(k+1)c}r_0 u^{-kc}e^{-1}]$ pour tout $k \geq 1$. On en déduit que la suite $[u^{(k+1)c}r_0 u^{-kc}]$ est constante. En particulier :

- lorsqu'on tend $u^{(k+1)c}r_0 u^{-kc}$, r_0 doit être complètement simplifié; ce qui implique que $\text{hauteur}(r_0) \leq \text{hauteur}(u)$, et donc que $\text{hauteur}(r) < \text{hauteur}(e)$;

Fig. 3 – Représentation schématique de r_0 et r_1

- pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe k tel que, lorsqu'on tend $u^{(k+1)c}r_0u^{-kc}$, il existe un sous-chemin u^p du chemin u^{k+1} précédant r_0 et un sous-chemin u^{-p} du chemin u^{-k} suivant r_0 qui sont complètement simplifiés.

Par conséquent, lorsque r_1 est non trivial, le lemme 1.9 s'applique : r_1 est un chemin exceptionnel, ie il existe $d' \in \mathbb{Z}$, $d' \neq 0$ tel que $r_1 = eu^{d'}e^{-1}$; on récupère le cas où r_1 est trivial en autorisant $d' = 0$. Alors $w = [m_0f_0(b^{-1})r_1bm_0^{-1}] = [m_0u^{d'-c}m_0^{-1}]$.

Le cas où $b = e^{-1}$ se ramène au cas précédent en permutant les rôles de r_0 et r_1 . On déduit de ce qui précède qu'il existe $d' \in \mathbb{Z}$, tel que $r_0 = eu^{d'}e^{-1}$, ie $w = [m_0r_0m_0^{-1}] = [m_0eu^{d'}e^{-1}m_0^{-1}]$.

Plaçons-nous dans le cas où $b = e'u^ae^{-1}$. Supposons, dans un premier temps, que $\text{hauteur}(e') > \text{hauteur}(e)$. Alors $r_1 = [e're'^{-1}]$ avec $r = [u^{a+c'-c}e^{-1}r_0eu^{-a}]$. Comme précédemment, en considérant que $r_1 = f_{0\#}^k(r_1) = [e'u^{a+(k+1)(c'-c)}e^{-1}r_0eu^{k(c-c')-a}e'^{-1}]$ pour tout $k \geq 1$, on voit que :

- lorsqu'on tend $u^{a+(k+1)(c'-c)}e^{-1}r_0eu^{k(c-c')-a}$, r_0 doit être complètement simplifié ; ce qui implique que $\text{hauteur}(r_0) \leq \text{hauteur}(u)$, et donc que $\text{hauteur}(r) < \text{hauteur}(e)$;
- pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe k tel que, lorsqu'on tend $u^{a+(k+1)(c'-c)}e^{-1}r_0eu^{k(c-c')-a}$, il existe un sous-chemin $u^{\varepsilon p}$ du chemin $u^{a+(k+1)(c'-c)}$ précédant r_0 et un sous-chemin $u^{-\varepsilon p}$ du chemin $u^{k(c-c')-a}$ suivant r_0 qui sont complètement simplifiés (où ε désigne le signe de $c' - c$).

Si ε est aussi le signe de c' (ie si $c' > c$), le lemme 1.9 assure alors que si r_1 est non trivial, alors r_1 est un chemin exceptionnel. Dans le cas où $c' < c$, on ne peut pas utiliser le lemme 1.9, mais on conclut encore que si r_1 est non trivial, alors r_1 est un chemin exceptionnel en adaptant directement les arguments de la démonstration du sous-lemme 5.5.1 de [3]. Finalement, il existe $d' \in \mathbb{Z}$ tel que $r_1 = e'u^{d'}e'^{-1}$, ie $w = m_0eu^{d'+c-c'}e^{-1}m_0^{-1}$.

Enfin, si $\text{hauteur}(e') < \text{hauteur}(e)$, en permutant les rôles de r_0 et r_1 , on montre qu'il existe $d' \in \mathbb{Z}$, tel que $r_0 = [f_0(b^{-1})r_1b] = eu^{d'}e^{-1}$, ie $w = m_0eu^{d'}e^{-1}m_0^{-1}$.

□

3 Application aux automorphismes de F_N

3.1 Ensemble exceptionnel d'un automorphisme

Définitions

Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. On définit l'**ensemble exceptionnel positif** de φ comme étant l'ensemble :

$$\mathcal{A}_\varphi^+ = \{g \in \text{Fix}\varphi \mid \exists g' \in \text{Fix}\varphi, \exists h \in F_N \setminus \text{Fix}\varphi, g = \varphi(h)g'h^{-1}\}.$$

Remarquons que $\text{Fix}\varphi$ agit par conjugaison sur \mathcal{A}_φ^+ : en effet si $g, g' \in \text{Fix}\varphi$, $h \in F_N \setminus \text{Fix}\varphi$ vérifient $g = \varphi(h)g'h^{-1}$, alors si $u \in \text{Fix}\varphi$, $ugu^{-1} = \varphi(h')g'h'^{-1}$ avec $h' = uh \notin \text{Fix}\varphi$. D'après la remarque 1.1, on peut donc considérer l'ensemble

$$\mathcal{A}_\varphi^{\diamond+} = \sqrt{\mathcal{A}_\varphi^+ / \text{Fix}\varphi},$$

que l'on appelle **ensemble exceptionnel positif réduit** de φ . On définit aussi l'**ensemble exceptionnel** (resp. l'**ensemble exceptionnel réduit**) de φ par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varphi &= \mathcal{A}_\varphi^+ \cup \mathcal{A}_{\varphi^{-1}}^+, \\ \text{resp. } \mathcal{A}_\varphi^\diamond &= \sqrt{\mathcal{A}_\varphi / \text{Fix}\varphi}. \end{aligned}$$

Le lemme suivant regroupe deux propriétés intéressantes de l'ensemble \mathcal{A}_φ^+ .

Lemme 2.9. Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. Alors :

- (i) $\mathcal{A}_{\varphi^{-1}}^+ = (\mathcal{A}_\varphi^+)^{-1}$ et $\mathcal{A}_{\varphi^{-1}}^{\diamond+} = (\mathcal{A}_\varphi^{\diamond+})^{-1}$;
- (ii) si B est un sous-groupe de F_N φ -invariant, alors $\mathcal{A}_{\varphi|_B} \subseteq \mathcal{A}_\varphi \cap B$ (où $\varphi|_B$ désigne la restriction de φ à B).

Preuve. (i) Pour montrer que $\mathcal{A}_{\varphi^{-1}}^+ = (\mathcal{A}_\varphi^+)^{-1}$, il suffit de remarquer que si $g, g' \in \text{Fix}\varphi$, alors $g = \varphi(h)g'h^{-1}$ si, et seulement si, $g^{-1} = \varphi^{-1}(h')g'^{-1}h'^{-1}$ où $h' = \varphi(h)$. On en déduit que $\mathcal{A}_{\varphi^{-1}}^{\diamond+} = (\mathcal{A}_\varphi^{\diamond+})^{-1}$ en utilisant la remarque 1.1.

(ii) Rappelons que $\text{Fix}\varphi|_B = \text{Fix}\varphi \cap B$. Soit $g \in \mathcal{A}_{\varphi|_B}^+ : g \in \text{Fix}\varphi \cap B$ et il existe $g' \in \text{Fix}\varphi \cap B$ et $h \in B \setminus \text{Fix}\varphi$ tels que $g = \varphi(h)gh^{-1}$. En particulier, $g \in \mathcal{A}_\varphi^+$. \square

Cardinal de l'ensemble exceptionnel réduit

Remarquons que si $\text{Fix}\varphi$ est trivial, \mathcal{A}_φ est vide, et si $\text{Fix}\varphi$ est infini cyclique, $\mathcal{A}_\varphi^\diamond$ est de cardinal au plus 2. Le théorème suivant donne une borne pour le cardinal de $\mathcal{A}_\varphi^\diamond$ lorsque $\text{Fix}\varphi$ est de rang supérieur ou égal à 2 ; la preuve utilise de manière cruciale le lemme 2.8.

Théorème 2.10. Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. Si $\text{Fix}\varphi$ est de rang au moins 2, alors l'ensemble exceptionnel réduit $\mathcal{A}_\varphi^\circ$ est de cardinal au plus $8N - 8$.

Preuve. On considère $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré représentant l'automorphisme extérieur Φ défini par φ . Le corollaire 2.2 de [5]) assure qu'il existe un point fixe v_0 de f_0 tel que φ soit conjugué à l'automorphisme

$$\begin{aligned} f_{0,v_0} : \pi_1(G, v_0) &\rightarrow \pi_1(G, v_0) \\ w &\mapsto f_{0\#}(w). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer φ par un conjugué, on peut donc confondre φ et f_{0,v_0} . Si $g \in F_N$, on note g_* le lacet pointé en v_0 représentant g . Notons que $g \in \text{Fix}\varphi$ si, et seulement si, g_* est un chemin de Nielsen.

Si un sommet v_i de G est un point fixe de f_0 dans la même classe de Nielsen que v_0 , on choisit un chemin de Nielsen η_i reliant v_0 à v_i (on choisit $\eta_0 = 1_{v_0}$). On définit \mathcal{E} comme l'ensemble constitué des éléments de F_n représentés par un lacet pointé en v_0 , de la forme

- $[\eta_i u^{\pm 1} \eta_i^{-1}]$ où v_i est le sommet terminal d'une arête e d'une strate polynomiale, u un lacet irréductible, non trivial, de Nielsen, et le twisteur de e est une puissance de u ,
- ou $[\eta_i e u^{\pm 1} e^{-1} \eta_i^{-1}]$ où e est une arête d'une strate polynomiale de sommet initial v_i , u un lacet irréductible, non trivial, de Nielsen, et le twisteur de e est une puissance de u .

Il est clair que $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{-1} \subseteq \text{Fix}\varphi$.

Soit $g \in \mathcal{A}_\varphi^+ : g_*$ est un lacet de Nielsen pointé en v_0 et il existe un chemin m de G pointé en v_0 qui n'est pas de Nielsen, et un lacet de Nielsen w qui vérifient $g_* = [f_0(m)wm^{-1}]$. Le lemme 2.8 assure alors qu'il existe un chemin de Nielsen m_0 pointé en v_0 tel que $g_* = [m_0 w_0 m_0^{-1}]$ où w_0 est de la forme :

- u^d avec $d \in \mathbb{Z}$, u un lacet de Nielsen irréductible tel qu'il existe une arête e d'une strate polynomiale, dont le twisteur est une puissance de u ,
- ou $eu^d e^{-1}$ avec $d \in \mathbb{Z}$, u un lacet de Nielsen irréductible et e une arête d'une strate polynomiale dont le twisteur est une puissance de u .

Le lacet w_0 est pointé en un sommet v_i dans la même classe de Nielsen que v_0 (puisque v_i est relié à v_0 par le chemin de Nielsen m_0). Alors $g_* = [m_0 \eta_i^{-1} \eta_i w_0 \eta_i^{-1} \eta_i m_0^{-1}]$, et $m_0 \eta_i^{-1}$ (resp. $\eta_i w_0 \eta_i^{-1}$) est un lacet de Nielsen pointé en v_0 , donc représente un élément $g \in \text{Fix}\varphi$ (resp. h). De plus $\sqrt{h} \in \mathcal{E} \cup \{1\}$. Finalement, \sqrt{w} est conjugué à $\sqrt{h} \in \mathcal{E}$, par $g \in \text{Fix}\varphi$.

On a donc montré que tout élément de \mathcal{A}_φ^+ avait un représentant dans \mathcal{E} . Puisque $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{-1}$, et que $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_\varphi^+ \cup (\mathcal{A}_\varphi^+)^{-1}$ (cf (i) du lemme 2.9), tout élément de $\mathcal{A}_\varphi^\circ$ a donc un représentant dans \mathcal{E} . Il nous reste à estimer le cardinal de \mathcal{E} .

Les éléments de \mathcal{E} sont les éléments de $F_N = \pi_1(G, v_0)$ représentés par les lacets pointés en v_0 de la forme $\eta e u^{\pm 1} e^{-1} \eta^{-1}$, $\eta' u^{\pm 1} \eta'^{-1}$, où e est une arête de G à croissance linéaire, u est le lacet irréductible, non trivial, de Nielsen dont le twisteur de e est une puissance, η (resp. η') un chemin de Nielsen fixé à l'avance joignant v_0 au sommet initial (resp. final) de e (s'il en existe). Chaque arête à croissance linéaire contribue donc à créer au plus quatre éléments de \mathcal{E} : $|\mathcal{E}| \leq 4n_0$ où n_0 est le nombre d'arêtes de G à croissance linéaire.

Remarquons que lorsqu'une arête e d'une strate polynomiale a un twisteur u non trivial, la propriété p-(ii) des train-tracks relatifs améliorés entraîne que son sommet terminal est de valence au moins trois : en effet, puisque $f_0(e) = e \cdot u$, on obtient un scindement $u \cdot f_{0\#}(u)$, et donc la première arête de u^{-1} et la première arête de $f_{0\#}(u)$ sont 2 arêtes distinctes (et distinctes de e), et elles ont pour sommet initial le sommet terminal de e . Plus généralement, un sommet v de G est point terminal d'au plus $\text{val}(v) - 2$ arêtes de strates polynomiales dont les twisteurs sont non triviaux (où $\text{val}(v)$ désigne la valence du sommet v dans G). En effet, parmi les arêtes de strates polynomiales dont le sommet terminal est v , et qui ont un twisteur non trivial, considérons la plus basse e_0 et son twisteur u_0 : les arêtes initiales et finales de u_0 sont distinctes et strictement plus basses que e_0 .

Si l'on désigne par n le nombre d'arêtes de strates polynomiales dont les twisteurs sont non triviaux, et par $V(G)$ (resp. $E(G)$) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de G , on obtient donc :

$$\begin{aligned} n &\leq \sum_{v \in V(G)} (\text{val}(v) - 2) \\ &= 2|E(G)| - 2|V(G)|, \end{aligned}$$

puisque G ne possède pas de sommet de valence 1. Or la caractéristique d'Euler de G est $\chi(G) = |V(G)| - |E(G)| = 2 - 2N$; donc $n \leq 2(N - 1)$.

Finalement, $|\mathcal{E}| \leq 4n_0 \leq 4n \leq 8(N - 1)$. Par conséquent, $\mathcal{A}_\varphi^\diamond$ est de cardinal au plus $8(N - 1)$. \square

3.2 Action du stabilisateur d'un point fixe sur les directions dans un arbre φ -invariant.

Soit $\varphi \in \text{Aut} F_N$, T un arbre φ -invariant (comme dans le théorème 2.1), $\mathcal{H} : T \rightarrow T$ l'homothétie couplée à φ , et Q_0 un point fixe de \mathcal{H} dans \overline{T} .

On appelle **direction en Q_0** de T , toute composante connexe de $\overline{T} \setminus \{Q_0\}$. On note $\pi_0(\overline{T} \setminus \{Q_0\})$ l'ensemble des directions en Q_0 . Lorsque le contexte est suffisamment explicite, on ne précisera pas "en Q_0 ".

Remarque 2.11. Puisqu'il y a au plus $2N$ orbites de $\text{Stab}Q_0$ -directions dans T (cf point iii) du théorème 2.1), quitte à remplacer φ par une puissance, on peut supposer que pour toute direction \mathcal{C} , il existe un élément $w \in \text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w\mathcal{C}$. De plus, cet élément est unique, puisque T est à stabilisateurs d'arcs triviaux. Dorénavant, on notera cet élément $w_{\mathcal{C}}$, et on l'appellera l'**angle propre** de \mathcal{C} .

Si $\mathcal{C}' = m\mathcal{C}$ est une direction dans la $\text{Stab}Q_0$ -orbite de \mathcal{C} , la formule ci-dessous donne le lien entre $w_{\mathcal{C}'}$ et $w_{\mathcal{C}}$:

$$w_{m\mathcal{C}} = \varphi(m)w_{\mathcal{C}}m^{-1}, \quad (2.4)$$

pour tout $m \in \text{Stab}Q_0$.

Cela résulte d'un simple calcul ; si $\mathcal{H}\mathcal{C} = w\mathcal{C}$, en utilisant la propriété (ii) des arbres φ -invariants (cf théorème 2.1), il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\mathcal{C}' &= \mathcal{H}m\mathcal{C} \\ &= \varphi(m)\mathcal{H}\mathcal{C} \\ &= \varphi(m)w\mathcal{C} \\ &= \varphi(m)wm^{-1}\mathcal{C}'. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant l'unicité de l'angle propre.

Soit \mathcal{C} une $\text{Stab}Q_0$ -orbite de directions. On pose :

$$A_{\mathcal{C}} = \text{Fix}\varphi \cap \bigcup_{\mathcal{C}' \in \mathcal{C}} w_{\mathcal{C}'}.$$

Si $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, la formule 2.4 montre que $A_{\mathcal{C}} = \{\varphi(m)w_{\mathcal{C}}m^{-1} | m \in \text{Stab}Q_0\} \cap \text{Fix}\varphi$.

Proposition 2.12. L'ensemble $A_{\mathcal{C}}$ vérifie les propriétés suivantes.

- a) Si $A_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}} \neq \emptyset$, alors $A_{\mathcal{C}} \subseteq \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}$.
- b) Si $A_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}} = \emptyset$, alors les éléments de $A_{\mathcal{C}}$ sont deux à deux conjugués par un élément de $\text{Fix}\varphi \cap \text{Stab}Q_0$.

Preuve. a) Soit $w \in A_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}$. Si $w' \in A_{\mathcal{C}}$, il existe $m \in \text{Stab}Q_0$ tel que $w' = \varphi(m)wm^{-1}$. Si $m \in \text{Fix}\varphi$, alors $m \in \text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_0} = \text{Fix}\varphi \cap \text{Stab}Q_0$, et donc $w' \in \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}$ puisque $\mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}$ est stable par $\text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_0}$ -conjugaison. Sinon $w = \varphi(m^{-1})w'm$ avec $w, w' \in \text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_0}$ et $m \in \text{Stab}Q_0 \setminus \text{Fix}\varphi$, donc $w' \in \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}$ par définition.

b) Si $A_{\mathcal{C}}$ est l'ensemble vide, le résultat est clair. Sinon, considérons $w, w' \in A_{\mathcal{C}}$. Il existe $m \in \text{Stab}Q_0$ tel que $w' = \varphi(m)wm^{-1}$. Puisque $A_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}} = \emptyset$, nécessairement $m \in \text{Fix}\varphi$. \square

Si $A_C \subseteq \mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab } Q_0}}$, on dit que C est **exceptionnelle**. Sinon, on dit que C est **non exceptionnelle** : dans ce cas, la proposition 2.12 assure que les éléments de A_C sont tous dans la même classe de $\text{Fix } \varphi|_{\text{Stab } Q_0}$ -conjugaison.

3.3 Comportement des suites $w_{\varphi,p}$

Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. Si $w \in F_N$, $p \in \mathbb{N}$, on note $w_{\varphi,p} = \varphi^{p-1}(w) \dots \varphi(w)w$.

Le corollaire 3.3 de [22] prouve que si la suite $w_{\varphi,p}$ n'est pas périodique, elle s'accumule sur une orbite périodique de $\partial\varphi$. La proposition suivante précise ce résultat :

Proposition 2.13. Si la suite $w_{\varphi,p}$ est périodique, alors w est φ -périodique. Si la suite $w_{\varphi,p}$ n'est pas périodique, alors :

- si w est φ -périodique, de période r , alors $w_{\varphi,r} \neq 1$ et $w_{\varphi,rp}$ converge vers $w_{\varphi,r}^{+\infty} \in \partial F_N$ quand p tend vers $+\infty$;
- sinon, $\omega(w) \subset \partial F_N$ est une orbite périodique de $\partial\varphi$, et $\omega(w)$ est aussi l'ensemble limite de la suite $w_{\varphi,p}$.

Preuve. La suite $w_{\varphi,p}$ est périodique si, et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $w_{\varphi,r} = 1$. Dans ce cas, $\varphi^r(w) = \varphi^r(w)w_{\varphi,r} = \varphi(w_{\varphi,r})w = w$.

Supposons donc désormais que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $w_{\varphi,r} \neq 1$. S'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^r(w) = w$, alors $\varphi^r(w_{\varphi,r}) = w_{\varphi,r}$, et donc $w_{\varphi,rp} = w_{\varphi,r}^p$ converge vers $w_{\varphi,r}^{+\infty} \in \partial F_N$ quand p tend vers $+\infty$.

Supposons enfin que w ne soit pas un élément périodique de φ : alors $\varphi^p(w)$ s'accumule sur une orbite périodique de $\partial\varphi$, d'après le théorème 3.1 de [22]. Remarquons que $w_{\varphi,p+1} = \varphi^p(w)w_{\varphi,p}$. Désignons par a_p le plus long préfixe de $\varphi^p(w)$ non simplifié avec $w_{\varphi,p}$ dans $w_{\varphi,p+1}$; alors $|\varphi^p(w)| = |w_{\varphi,p}| - |w_{\varphi,p+1}| + 2|a_p|$. On en déduit que $|a_p|$ ne peut être bornée ; sinon, comme $|\varphi^p(w)|$ tend vers $+\infty$, $|w_{\varphi,p}|$ serait strictement décroissante à partir d'un certain rang, ce qui est absurde.

On sait aussi, d'après le corollaire 3.3 de [22], que la suite $w_{\varphi,p}$ s'accumule sur une orbite périodique de $\partial\varphi$. Puisque la suite a_p est non bornée, on en déduit que les orbites périodiques sur lesquelles s'accumulent $\varphi^p(w)$ et $w_{\varphi,p}$ sont les mêmes. \square

Si les points périodiques de $\overline{\varphi}$ sont en fait des points fixes, la proposition 2.13 s'exprime plus simplement ; on obtient le :

Corollaire 2.14. Soit $w \in F_N$, et $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ tel que tout élément périodique de $\overline{\varphi}$ est en fait un point fixe $\overline{\varphi}$. Si $w \neq 1$, $w_{\varphi,p}$ n'est pas périodique, et :

- si $w \in \text{Fix } \varphi$, alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} w_{\varphi,p} = w^{+\infty} \in \partial F_N$;
- sinon, $\lim_{p \rightarrow +\infty} w_{\varphi,p} = \omega(w) \in \partial F_N$.

3.4 Finitude des points d'accumulation

Théorème 2.15. Il existe une constante M_N (qui ne dépend que de N) telle que si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ est tel que $\text{Fix}\bar{\varphi} = \text{Per}\bar{\varphi}$, alors il y a au plus M_N classes isoglosses d'éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ et de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$. De plus, les éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ et de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ sont tous des points rationnels.

La preuve que je donne du théorème 2.15 fait de nombreuses références à la preuve du théorème II de [22] qui affirme que tout automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ a une dynamique asymptotiquement périodique sur \bar{F}_N : si $x \in \bar{F}_N$, alors $\omega_{\bar{\varphi}}(x)$ est une orbite périodique de $\bar{\varphi}$. Pour le confort du lecteur, je vais dans un premier temps raconter rapidement comment fonctionne la démonstration du théorème II de [22]. Je triche un peu, car je vais utiliser (implicitement) le corollaire 2.14, qui est une conséquence de la périodicité asymptotique pour les éléments de F_N : mon but n'est pas de donner une preuve du théorème II, mais plutôt d'expliquer comment les choses se passent.

A propos de la preuve de la périodicité asymptotique des éléments de \bar{F}_N

C'est une démonstration par récurrence sur le rang de F_N . On considère un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, et un arbre T φ -invariant (comme dans le théorème 2.1, dont j'utilise les notations par la suite, notamment les applications j et Q) muni d'une homothétie $\mathcal{H} : T \rightarrow T$ couplée à φ . Quitte à remplacer φ par une puissance, on peut supposer que tous les points périodiques de $\bar{\varphi}$ sont en fait fixes. Un résultat-clé est le suivant ³ :

Lemme 2.16. Soit $w \in F_N$, $w \neq 1$ et $x \in \bar{F}_N$ tels que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\bar{\varphi}^k(wx) | \bar{\varphi}^{k+1}(x)) = +\infty.$$

Alors :

- si $w \notin \text{Fix}\varphi$, alors $\omega(x) = \omega(w)$ ou $\omega(w^{-1})$;
- si $w \in \text{Fix}\varphi$, alors $\omega(x) = w^{\pm\infty}$.

Si $w \notin \text{Fix}\varphi$, on discute selon que la simplification entre $\varphi^k(w)$ et $\bar{\varphi}^k(x)$ est non bornée (dans ce cas $\omega(x) = \omega(w^{-1})$) ou bornée (dans ce cas $\omega(x) = \omega(w)$). Si $w \in \text{Fix}\varphi$, on remarque que pour tout n , $\lim_{k \rightarrow +\infty} (w^n \bar{\varphi}^k(x) | \bar{\varphi}^{k+n}(x)) = +\infty$, et on conclut que $\omega(x) = w^{\pm\infty}$.

Le lemme 2.16 sert dans la situation suivante : à un élément $x \in \bar{F}_N \setminus \text{Fix}\bar{\varphi}$, on associe (j'explique par la suite plus en détail comment) un point fixe Q_0 de \mathcal{H} , et

³C'est une traduction du lemme 2.1 de [22], utilisant le corollaire 2.14.

une direction \mathcal{C} en Q_0 . Il existe (quitte à remplacer φ par une puissance : cf remarque 2.11) un élément $w_{\mathcal{C}} \in \text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$: si $w_{\mathcal{C}} \neq 1$, on applique le lemme 2.16 à $w_{\mathcal{C}}$ et x .

Si l'arbre T est simplicial, \mathcal{H} est une isométrie. Lorsque \mathcal{H} est hyperbolique, on montre directement que $\bar{\varphi}$ à une dynamique nord-sud (du point de ∂F_N défini par le point répulsif de \mathcal{H} vers celui défini par le point attractif de \mathcal{H}). Supposons que \mathcal{H} est elliptique, et désignons par T_0 l'ensemble des points fixes de \mathcal{H} (c'est un sous-arbre de T). Si g est dans le stabilisateur d'un point de T_0 , on conclut par récurrence, et sinon on considère le point Q_0 de T_0 tel que $[Q_0, gQ_0] \cap T_0 = \{Q_0\}$, alors la direction \mathcal{C} en Q_0 à laquelle gQ_0 appartient détermine $\omega(g)$. En effet, $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$, et donc les points $\varphi^k(w_{\mathcal{C}}g)Q_0 = \mathcal{H}^k w_{\mathcal{C}}g\mathcal{C}$ et $\varphi^{k+1}Q_0 = \mathcal{H}^{k+1}gQ_0$ sont dans $\mathcal{H}^{k+1}\mathcal{C}$, d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty}(\varphi^k(w_{\mathcal{C}}g)|\varphi^{k+1}(g)) = +\infty$ (en utilisant le fait que les $\mathcal{H}^i\mathcal{C}$ sont deux à deux distincts puisque le germe de $[Q_0, gQ_0]$ ne peut être périodique étant donné le choix de Q_0). On conclut en utilisant le lemme 2.16.

Il reste à regarder les points du bord de F_N . Si $X \in \partial F_N$ est dans le bord du stabilisateur d'un point de T_0 , on conclut par récurrence. Si X est dans le bord du stabilisateur d'un point R de $T \setminus T_0$, on désigne par Q_0 le point de T_0 le plus proche de R , et on considère \mathcal{C} direction en Q_0 qui contient R ; on vérifie que pour tout p $\lim_{k \rightarrow +\infty}(\varphi^k(w_{\mathcal{C}}g_p)|\varphi^{k+1}(g_p)) = +\infty$, où g_p est une suite d'éléments de $\text{Stab}R$ convergeant vers X , et on conclut en utilisant le lemme 2.16 pour chaque g_p . Si X n'est dans le stabilisateur d'aucun point de T , alors $X = j(e)$ pour un certain bout e de T ; si $X \notin \text{Fix}\partial\varphi$, e n'est pas un bout de T_0 . On désigne par Q_0 le point de T_0 le plus proche de e , et on conclut comme précédemment en appliquant le lemme 2.16 à chaque élément d'une suite g_p tendant vers X .

Remarque 2.17. En particulier, si X n'est pas dans le stabilisateur d'un point fixe de \mathcal{H} , alors dans tout voisinage de X dans \bar{F}_N , on trouve un élément $g \in F_N$ tel que $\omega(X) = \omega(g)$.

Il nous faut maintenant regarder le cas où il n'existe pas d'arbre simplicial φ -invariant. On désigne par Q_0 l'unique point fixe de \mathcal{H} dans \bar{T} . Si $g \in \text{Stab}Q_0$, on conclut par récurrence. Si $g \in F_N \setminus \text{Stab}Q_0$, on considère la direction \mathcal{C} en Q_0 qui contient gQ_0 , et $w_{\mathcal{C}} \in \text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$. Si $w_{\mathcal{C}} = 1$, on montre que $\omega(g) = j(\rho_{\mathcal{C}})$ où $\rho_{\mathcal{C}}$ désigne l'unique rayon propre de \mathcal{C} . Sinon, on remarque que $[Q_0, w_{\mathcal{C}}gQ_0] \cap [Q_0, \mathcal{H}gQ_0]$ est un segment non trivial, et donc, en itérant \mathcal{H} , $[Q_0, \mathcal{H}^k w_{\mathcal{C}}gQ_0] \cap [Q_0, \mathcal{H}^{k+1}gQ_0]$ est un segment dont la longueur tend vers $+\infty$, ce qui implique que $\lim_{k \rightarrow +\infty}(\varphi^k(w_{\mathcal{C}}g)|\varphi^{k+1}(g)) = +\infty$ par "backtracking borné" (cf propriété BBT2 de la proposition 3.1 de [12]). On conclut en utilisant le lemme 2.16.

Considérons $X \in \partial F_N$. Si $X \in \partial \text{Stab}Q_0$, on conclut par récurrence. Si $Q(X) \neq Q_0$, on considère \mathcal{C} la direction en Q_0 contenant $Q(X)$, et $w_{\mathcal{C}} \in \text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$. Si $w_{\mathcal{C}} = 1$, en utilisant la propriété de "backtracking borné" on montre

que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (j(\rho_C) | \varphi^k(g_p)) = +\infty$ uniformément en p (où g_p est une suite d'éléments de F_N tendant vers X), et donc que $\omega(X) = j(\rho_C)$. Si $w_C \neq 1$, on remarque que $[Q_0, w_C g_p Q_0] \cap [Q_0, \mathcal{H} g_p Q_0]$ est un segment non trivial, et on applique le raisonnement que l'on a fait dans le cas d'un élément $g \in F_N$ à chaque g_p ; on obtient que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\varphi^k(w_C g_p) | \varphi^{k+1}(g_p)) = +\infty$ uniformément en p , et conclut avec le lemme 2.16.

Il reste le cas difficile d'un point $X \notin \partial \text{Stab} Q_0$ tel que $Q(X) = Q_0$. Si l'on construit l'arbre T par un procédé limite à partir d'un train-track relatif $f_0 : G \rightarrow G$ représentant Φ , dont la strate supérieure est exponentielle, et que l'on considère un point fixe répulsif de $\partial \varphi$ tel que tout rayon représentant X dans G traverse la strate supérieure de G , alors $X \notin \partial \text{Stab} Q_0$ et $Q(X) = Q_0$. Plus généralement un point fixe répulsif X de $\partial(i_w \circ \varphi)$ où $w \in \text{Stab} Q_0$ tel que tout rayon le représentant dans G traverse la strate supérieure de G vérifie que $X \notin \partial \text{Stab} Q_0$ et que $Q(X) = Q_0$. Le théorème 5.1 de [22] montre que ce sont les seules possibilités; plus exactement si $X \notin \text{Stab} Q_0$ et $Q(X) = Q_0$, alors il existe $q \geq 1$ et $w \in \text{Stab} Q_0$ tels que X est point fixe de $\partial(i_w \circ \varphi^q)$. A la lecture de la preuve de ce théorème, on se rend compte que la constante q ne dépend que du rang de F_N . Finalement, on obtient le :

Théorème 2.18 (Levitt, Lustig). Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. S'il n'existe pas d'arbre φ -invariant simplicial, alors il existe un arbre réel φ -invariant avec $\lambda > 1$, et une puissance φ^q de φ ($q \geq 1$) tels que pour tout $X \in \partial F_N$ on soit dans l'une (au moins) de ces situations :

1. $X \in \partial \text{Stab} Q_0$;
2. $Q(X) \neq Q_0$;
3. il existe $w \in \text{Stab} Q_0$ tel que X soit un point fixe répulsif de $w \partial \varphi = \partial(i_w \circ \varphi)$.

Plus précisément, en utilisant un train-track relatif amélioré $f_0 : G \rightarrow G$ dont la strate supérieure est exponentielle pour représenter Φ , et un train-track relatif amélioré $f'_0 : G \rightarrow G$ représentant φ^{-1} apparié à f_0 (comme dans la section 3.2 de [3]), les auteurs de [22] construisent un arbre T' φ^{-1} -invariant, qualifié d'arbre dual à T , dont les éléments elliptiques sont les mêmes que ceux de T . L'homothétie \mathcal{H}' couplée à φ^{-1} est bien entendu de rapport $\lambda' > 1$, et possède un unique point fixe Q'_0 dans $\overline{T'}$; de plus $\text{Stab} Q_0 = \text{Stab} Q'_0$. On note $j' : \partial T' \rightarrow \partial F_N$ l'application du point (iv) du théorème 2.1 pour T' . Le lemme 8.7 de [22] montre en fait que X est l'image par j' d'un rayon propre ρ' dans T' de l'homothétie $w \mathcal{H}'$ couplée à $(i_w \circ \varphi)^{-1}$.

Pour conclure, si X est un point fixe répulsif de $i_w \circ \varphi$, avec $w \in \text{Stab} Q_0$, alors $\partial \varphi^k(X) = (w^{-1})_{\varphi, k} X$. On peut supposer que $w \neq 1$ (sinon X est un point fixe de φ), et que la simplification entre $(w^{-1})_{\varphi, k}$ et X est bornée (sinon $X \in \partial \text{Stab} Q_0$). Donc $\omega(X) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (w^{-1})_{\varphi, k}$.

Preuve du théorème 2.15, et conséquences

Preuve du théorème 2.15. Remarquons tout d'abord que $\text{Fix } \varphi = \text{Fix } \varphi^p$, $L_\varphi^+ = L_{\varphi^p}^+$ et $L_{\partial\varphi}^+ = L_{\partial\varphi^p}^+$ pour $p \geq 2$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour une puissance de φ . Si $\text{Fix } \varphi$ est trivial ou infini cyclique, le résultat est clair. On peut donc supposer que $\text{Fix } \varphi$ est de rang supérieur ou égal à 2.

Si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, on désigne par $\nu_N(\varphi)$ (resp. $\nu_N(\partial\varphi)$) le nombre de classes isoglosses d'éléments de $(L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix } \varphi) \setminus \mathcal{R}(\mathcal{A}_\varphi)$ (resp. $(L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix } \varphi) \setminus \mathcal{R}(\mathcal{A}_\varphi)$). Rappelons que $L_\varphi^+ \subseteq L_{\partial\varphi}^+$ (cf remarque 1.6), et que donc $\nu_N(\varphi) \leq \nu_N(\partial\varphi)$.

On considère un arbre φ -invariant T , comme dans le théorème 2.1, et l'homothétie $\mathcal{H} : T \rightarrow T$ couplée à φ , de rapport $\lambda \geq 1$. On utilisera, dans la suite de la preuve, les notations du théorème 2.1 (notamment les applications j et Q).

Rappelons (cf ii) du théorème 2.1) que si Q_0 est un point fixe de \mathcal{H} , le stabilisateur de Q_0 est φ -invariant ; on note $\varphi|_{\text{Stab } Q_0}$ la restriction de φ à $\text{Stab } Q_0$. Remarquons que, puisque $\text{Fix } \varphi|_{\text{Stab } Q_0} = \text{Fix } \varphi \cap \text{Stab } Q_0$, si $X_1, X_2 \in \partial\text{Stab } Q_0$ sont dans la même classe isoglosse pour $\varphi|_{\text{Stab } Q_0}$, alors ils sont aussi dans la même classe isoglosse pour φ .

1^{ère} étape : *on montre par récurrence que les éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix } \varphi$ et de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix } \varphi$ sont tous rationnels. De plus, on établit des majorations de $\nu_N(\varphi)$ et $\nu_N(\partial\varphi)$ en fonctions d'éléments caractéristiques de T .*

1^{er} cas : il existe un arbre φ -invariant simplicial.

Si \mathcal{H} est hyperbolique, alors $\overline{\varphi}$ a une dynamique nord-sud sur \overline{F}_N (c'est standard : voir par exemple la démonstration du théorème 1.1 de [24]). En particulier, $\text{Fix } \varphi$ est trivial, et donc $\nu_N(\varphi) = 0$. On suppose dorénavant que \mathcal{H} est elliptique.

On choisit l'arbre T de façon à minimiser le nombre d'arêtes du graphe $\Gamma = T/F_N$. D'après le lemme 4.7 de [12], si \mathcal{H} possède au moins deux points fixes, alors Γ ne possède qu'une seule arête. On est donc ramené à étudier les trois cas suivants :

- A) \mathcal{H} possède un unique point fixe Q_0 ,
- B) \mathcal{H} fixe une arête et Γ est un segment,
- C) \mathcal{H} fixe une arête et Γ est un lacet.

A) Supposons que \mathcal{H} possède un unique point fixe Q_0 dans T . On désigne par r le rang de $\text{Stab } Q_0$, et par v le nombre de $\text{Stab } Q_0$ -orbites de $\pi_0(T \setminus \{Q_0\})$. D'après la remarque 2.11, quitte à remplacer φ par une puissance, pour toute direction \mathcal{C} en Q_0 , il existe un unique $w_{\mathcal{C}} \in \text{Stab } Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$.

Soit $g \in \mathcal{U}_\varphi = F_N \setminus \text{Fix } \varphi$. Si $g \in \text{Stab } Q_0$, $\omega(g) \in L_{\varphi|_{\text{Stab } Q_0}}^+$. Sinon, $gQ_0 \neq Q_0$. On note \mathcal{C} la direction en Q_0 qui contient gQ_0 . En reprenant la preuve du théorème 3.1 de [22], on obtient que $w_{\mathcal{C}} \neq 1$ et que :

- si $w_C \notin \text{Fix}\varphi$, $\omega(g) = \omega(w_C)$ ou $\omega(w_C^{-1})$; en particulier, $\omega(g) \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$;
- si $w_C \in \text{Fix}\varphi$, $\omega(g) = w_C^{\pm\infty}$.

En particulier, si $X \in L_{\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ n'est pas élément de $L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_0}$, alors X est un point rationnel.

Le point (ii) du lemme 2.9 assure que si $X \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+ \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}})$, alors $X \in L_{\varphi}^+ \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\varphi})$. D'autre part, d'après la proposition 2.12, seules les $\text{Stab}Q_0$ -orbites de directions non exceptionnelles contribuent à $\nu_N(\varphi)$. De plus, pour chaque $\text{Stab}Q_0$ -orbite C non exceptionnelle, tous les éléments de A_C sont dans la même classe de $\text{Fix}\varphi$ -conjugaison. Donc C crée au plus 2 classes isoglosses d'éléments de $L_{\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$. Puisqu'il existe au plus v $\text{Stab}Q_0$ -orbites de directions, il vient que :

$$\nu_N(\varphi) \leq \nu_r(\varphi|_{\text{Stab}Q_0}) + 2v. \quad (2.5)$$

Soit $X \in \mathcal{U}_{\partial\varphi} = \partial F_N \setminus \text{Fix}\partial\varphi$. La preuve du théorème 4.1 de [22] montre que si $X \notin \partial\text{Stab}Q_0$, alors dans tout voisinage de X dans \overline{F}_N , il existe un élément $g \in F_N$ tel que $\omega(X) = \omega(g)$. En particulier, si $\omega(X) \notin L_{\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_0}$, alors $\omega(X)$ est un point rationnel, et comme précédemment :

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq \nu_r(\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_0}) + 2v. \quad (2.6)$$

B) Supposons que \mathcal{H} fixe une arête et que Γ soit un segment. Si l'on désigne par Q_1 et Q_2 les extrémités d'une arête laissée fixe par \mathcal{H} , la théorie de Bass-Serre ⁴ donne une décomposition non triviale $F_N = \text{Stab}Q_1 * \text{Stab}Q_2$; cette décomposition est φ -invariante d'après (ii) du théorème 2.1. En particulier, si r_i est le rang de $\text{Stab}Q_i$, on a $N = r_1 + r_2$. De plus, $\text{Fix}\varphi = \text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_1} * \text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_2}$ (voir par exemple la proposition 4.10 de [12]).

Si $g \in F_N$, g s'écrit comme un produit $g_1 g_2 \dots g_p$ d'éléments de F_N alternativement dans $\text{Stab}Q_1$ et $\text{Stab}Q_2$; de plus $g \in \text{Fix}\varphi$ si, et seulement si $g_i \in \text{Fix}\varphi$ pour tout i . Si $g \notin \text{Fix}\varphi$, on considère le plus petit indice i_0 tel que $g_{i_0} \notin \text{Fix}\varphi$, et on pose $m = g_1 g_2 \dots g_{i_0-1}$. Alors $\omega(g) = m\omega(g_{i_0})$ avec $m \in \text{Fix}\varphi$ et $\omega(g_{i_0}) \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_1}}^+ \sqcup L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_2}}^+$. L'ensemble des classes isoglosses d'éléments de L_{φ}^+ est donc la réunion de l'ensemble des classes isoglosses de $L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_1}}^+$ et de $L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_2}}^+$. L'hypothèse de récurrence assure que les points de $L_{\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ sont rationnels. De plus :

$$\nu_N(\varphi) \leq \nu_{r_1}(\varphi|_{\text{Stab}Q_1}) + \nu_{r_2}(\varphi|_{\text{Stab}Q_2}). \quad (2.7)$$

Soit $X \in \mathcal{U}_{\partial\varphi} = \partial F_N \setminus \text{Fix}\partial\varphi$. S'il existe un sommet Q de T tel que $X \in \partial\text{Stab}Q$, alors X s'écrit sous la forme $x_1 x_2 \dots x_{p-1} x_p$, les x_i , $1 \leq i \leq p-1$, étant

⁴Voir par exemple [37], ou [36].

des éléments de F_N alternativement dans $\text{Stab}Q_1$ et $\text{Stab}Q_2$ et x_p un éléments de $\partial\text{Stab}Q_j$ si Q est dans l'orbite de Q_j ($j \in \{1, 2\}$), avec $x_{p-1} \in \text{Stab}Q_1$ si, et seulement si $x_p \in \partial\text{Stab}Q_2$. Sinon, X s'écrit comme un produit infini $x_1x_2 \dots$ d'éléments de F_N alternativement dans $\text{Stab}Q_1$ et $\text{Stab}Q_2$. Puisque $X \notin \text{Fix}\partial\varphi$, il existe un plus petit indice i_0 tel que $x_{i_0} \notin \text{Fix}\overline{\varphi}$. Alors $\omega(X) = m\omega(x_{i_0})$ avec $m = x_1 \dots x_{i_0-1} \in \text{Fix}\varphi$ et $\omega(x_{i_0}) \in L_{\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_1}}^+ \sqcup L_{\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_2}}^+$. L'hypothèse de récurrence assure que les points de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ sont rationnels et que :

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq \nu_{r_1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_1}) + \nu_{r_2}(\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_2}). \quad (2.8)$$

C) Supposons que \mathcal{H} fixe une arête et que Γ soit un lacet. On désigne par T_0 le sous-arbre de T constitué des points fixes de \mathcal{H} . Désignons par e une arête de T_0 , R_1 son sommet initial et R_2 son sommet final. La théorie de Bass-Serre assure que F_N possède un scindement $F_N = \text{Stab}R_1 * \langle t \rangle$ où $t \in F_N$ est tel que $tR_1 = R_2$; $\text{Stab}R_1$ (resp. $\text{Stab}R_2$) est φ -invariant et de rang $N-1$. Remarquons que $\varphi(t)R_1 = \varphi(t)\mathcal{H}R_1 = \mathcal{H}tR_1 = \mathcal{H}R_2 = R_2$, et donc que $\varphi(t) = ta$ où $a \in \text{Stab}R_1$. On désigne par v_1 (resp. v_2) le nombre de $\text{Stab}R_1$ -orbites (resp. $\text{Stab}R_2$ -orbites) de directions en R_1 (resp. R_2).

Soit $g \in \mathcal{U}_\varphi = F_N \setminus \text{Fix}\varphi$. Il existe un unique point Q_0 de T_0 défini par $[Q_0, gQ_0] \cap T_0 = \{Q_0\}$ (cf la preuve du théorème 3.1 de [22]). Si $gQ_0 = Q_0$, alors $\omega(g) \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$. Sinon, considérons \mathcal{C} la direction en Q_0 qui contient gQ_0 , et $w_{\mathcal{C}}$ l'élément de $\text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$ (cf remarque 2.11); comme dans le cas A), $w_{\mathcal{C}} \neq 1$ et :

- si $w_{\mathcal{C}} \notin \text{Fix}\varphi$, alors $\omega(g) \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$,
- si $w_{\mathcal{C}} \in \text{Fix}\varphi$, alors $\omega(g) = w_{\mathcal{C}}^{\pm\infty}$.

En particulier, les points de $L_{\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ qui ne sont pas dans $L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$ pour un certain point $Q_0 \in T_0$ sont rationnels. Rappelons encore que seules les $\text{Stab}Q_0$ -orbites de directions non exceptionnelles contribuent à $\nu_N(\varphi)$, et que chacune crée au plus 2 classes isoglosses d'éléments de $L_{\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ (cf proposition 2.12).

Lemme 2.19. Il n'existe qu'une seule $\text{Fix}\varphi$ -orbite d'arêtes dans T_0 .

Preuve. En effet, considérons e_1, e_2 deux arêtes de T_0 . Puisqu'il n'y a qu'une seule F_N -orbite d'arêtes dans T , il existe $w \in F_N$ tel que $e_2 = we_1$. Alors $e_2 = \mathcal{H}(e_2) = \mathcal{H}(we_1) = \varphi(w)\mathcal{H}(e_1) = \varphi(w)e_1$; puisque T est à stabilisateurs d'arcs triviaux, $w = \varphi(w)$. \square

Il y a donc au plus 2 $\text{Fix}\varphi$ -orbites de sommets de T_0 . En fait, il y a exactement 2 $\text{Fix}\varphi$ -orbites de sommets, sauf dans le cas où il existe $t \in \text{Fix}\varphi$ et une arête e de T_0 tels que $R_2 = tR_1$ (où R_1 est le sommet initial de e et R_2 son sommet final) : dans ce

cas, il n'y a qu'une seule $\text{Fix}\varphi$ -orbite de sommets de T_0 . D'autre part, deux sommets de T_0 dans la même $\text{Fix}\varphi$ -orbite contribuent à créer des points de L_φ^+ isoglosses.

Finalement, s'il n'existe qu'une seule $\text{Fix}\varphi$ -orbite de sommets dans T_0 , on obtient que :

$$\nu_N(\varphi) \leq \nu_{N-1}(\varphi|_{\text{Stab}R_1}) + 2v_1. \quad (2.9)$$

S'il existe 2 $\text{Fix}\varphi$ -orbites de sommets dans T_0 , on obtient que :

$$\nu_N(\varphi) \leq \nu_{N-1}(\varphi|_{\text{Stab}R_1}) + 2v_1 + \nu_{N-1}(\varphi|_{\text{Stab}R_2}) + 2v_2. \quad (2.10)$$

Comme dans le cas A), en remarquant que si $X \in \mathcal{U}_{\partial\varphi} = \partial F_N \setminus \text{Fix}\partial\varphi$, alors dans tout voisinage de X dans \overline{F}_N , il existe un élément $g \in F_N$ tel que $\omega(X) = \omega(g)$, on obtient que les éléments de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ sont rationnels. S'il n'existe qu'une seule $\text{Fix}\varphi$ -orbite de sommets dans T_0 , alors :

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq \nu_{N-1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}R_1}) + 2v_1. \quad (2.11)$$

S'il existe 2 $\text{Fix}\varphi$ -orbites de sommets dans T_0 , on obtient que :

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq \nu_{N-1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}R_1}) + 2v_1 + \nu_{N-1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}R_2}) + 2v_2. \quad (2.12)$$

2^d cas : il n'existe pas d'arbre φ -invariant simplicial. Soit Q_0 l'unique point fixe de \mathcal{H} dans \overline{T} . On désigne par r le rang de $\text{Stab}Q_0$, et par v le nombre de $\text{Stab}Q_0$ -orbites de $\pi_0(T \setminus \{Q_0\})$. D'après la remarque 2.11, quitte à remplacer φ par une puissance, pour toute direction \mathcal{C} en Q_0 , il existe un unique $w_{\mathcal{C}} \in \text{Stab}Q_0$ tel que $\mathcal{H}\mathcal{C} = w_{\mathcal{C}}\mathcal{C}$.

Soit $g \in \mathcal{U}_\varphi = F_N \setminus \text{Fix}\varphi$. Si $g \in \text{Stab}Q_0$, $\omega(g) \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$. Sinon, $gQ_0 \neq Q_0$. On note \mathcal{C} la direction en Q_0 qui contient gQ_0 . En reprenant la preuve du théorème 3.1 de [22], on obtient les résultats suivants.

- Si $w_{\mathcal{C}} = 1$, $\omega(g) = j(\rho_{\mathcal{C}})$ où $\rho_{\mathcal{C}}$ désigne l'unique rayon propre contenu dans \mathcal{C} ; en particulier, $\omega(g)$ est un point attractif d'après (iv) du théorème 2.1.
- Si $w_{\mathcal{C}} \neq 1$ et $w_{\mathcal{C}} \notin \text{Fix}\varphi$, $\omega(g) = \omega(w_{\mathcal{C}})$ ou $\omega(w_{\mathcal{C}}^{-1})$; en particulier, $\omega(g) \in L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+$.
- Si $w_{\mathcal{C}} \neq 1$ et $w_{\mathcal{C}} \in \text{Fix}\varphi$, $\omega(g) = w_{\mathcal{C}}^{\pm\infty}$.

Donc si $X \in L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ n'est pas élément de $L_{\varphi|_{\text{Stab}Q_0}}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi|_{\text{Stab}Q_0}$, alors X est un point rationnel.

D'après la proposition 2.12, seules les $\text{Stab}Q_0$ -orbites de directions non exceptionnelles contribuent à $\nu_N(\varphi)$, et tous les éléments de $A_{\mathcal{C}}$ (où \mathcal{C} est une telle orbite) sont dans la même classe de $\text{Fix}\varphi$ -conjugaison; donc \mathcal{C} crée au plus 2 classes

isoglosses d'éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial \text{Fix} \varphi$. Puisqu'il existe au plus v $\text{Stab} Q_0$ -orbites de directions, il vient que :

$$\nu_N(\varphi) \leq \nu_r(\varphi|_{\text{Stab} Q_0}) + 2v. \quad (2.13)$$

Soit $X \in \mathcal{U}_{\partial\varphi} = \partial F_N \setminus \text{Fix} \partial\varphi$. Le théorème 5.1 de [22] assure que, quitte à remplacer φ par une puissance, on est dans l'un des cas suivants :

1. $X \in \partial \text{Stab} Q_0$;
2. $Q(X) \neq Q_0$;
3. il existe $w \in \text{Stab} Q_0$ tel que X soit point fixe répulsif de $w\partial\varphi = \partial(i_w \circ \varphi)$.

Dans le premier cas, $\omega(X) \in L_{\partial\varphi|_{\text{Stab} Q_0}}^+$. Dans le deuxième cas, on montre, comme dans la preuve du théorème II de [22], que $\omega(X) = \omega(g)$ pour tout $g \in F_N$ suffisamment proche de X . On est donc ramené à la discussion précédente.

Dans le troisième cas, on suppose que $X \notin \partial \text{Stab} Q$. Remarquons que $\partial\varphi^p(X) = (w^{-1})_{\varphi,p} X$. En particulier, le fait que X ne soit pas un point fixe de $\partial\varphi$ entraîne que $w \neq 1$. Puisque $(w^{-1})_{\varphi,p} \in \text{Stab} Q$ et $X \notin \partial \text{Stab} Q$, la simplification entre $(w^{-1})_{\varphi,p}$ et X est bornée. Le corollaire 2.14 assure alors que :

- si $w \notin \text{Fix} \varphi$, $\omega(X) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (w^{-1})_{\varphi,p} = \omega(w^{-1}) \in L_{\varphi|_{\text{Stab} Q_0}}^+$;
- si $w \in \text{Fix} \varphi$, alors $\omega(X) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (w^{-1})_{\varphi,p} = w^{-\infty}$.

En particulier, si $\omega(X) \notin L_{\varphi|_{\text{Stab} Q_0}}^+$, alors $\omega(X)$ est rationnel.

Précisons la nature de X (cf partie 8 de [22]) : il existe un arbre T' φ^{-1} -invariant (arbre "dual" à T), dont les éléments elliptiques sont les mêmes que ceux de T . L'homothétie \mathcal{H}' couplée à φ^{-1} est bien entendu de rapport $\lambda' > 1$, et possède un unique point fixe Q'_0 dans $\overline{T'}$; de plus $\text{Stab} Q_0 = \text{Stab} Q'_0$. On note $j' : \partial T' \rightarrow \partial F_N$ l'application du point (iv) du théorème 2.1 pour T' . Alors (cf lemme 8.7 de [22]) X est l'image par j' d'un rayon propre ρ' dans T' de l'homothétie $w\mathcal{H}'$ couplée à $(i_w \circ \varphi)^{-1}$. Dans T' , considérons la direction \mathcal{C}' en Q'_0 qui contient ρ' . Alors \mathcal{C}' est laissée fixe par $w\mathcal{H}'$, ie $\mathcal{H}'\mathcal{C}' = w^{-1}\mathcal{C}'$.

Seules les orbites de directions en Q'_0 non exceptionnelles contribuent à $\mu_N(\partial\varphi)$, et chacune ne donne au plus qu'une classe de conjugaison par $\text{Fix} \varphi \cap \text{Stab} Q_0 = \text{Fix} \varphi^{-1} \cap \text{Stab} Q'_0$. Si l'on désigne par v' le nombre de $\text{Stab} Q'_0$ -orbites de $\pi_0(T' \setminus \{Q'_0\})$, on obtient donc au plus $2v'$ nouvelles classes isoglosses d'éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial \text{Fix} \varphi$ dont la racine n'est pas dans \mathcal{E}_φ . Finalement, on obtient donc que :

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq \nu_r(\partial\varphi|_{\text{Stab} Q_0}) + 2v + v'. \quad (2.14)$$

2^{de} étape : On montre par récurrence sur le rang de F_N l'existence de la constante M_N .

Remarquons pour commencer que le théorème 2.10 entraîne qu'il y a au plus $8N - 8$ classes isoglosses d'éléments de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_\varphi)$. Il suffit donc de prouver l'existence d'une constante M'_N telle que $\nu_N(\varphi) \leq M'_N$ et $\nu_N(\partial\varphi) \leq M'_N$ pour tout $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ (et alors $M_N = M'_N + 8N - 8$ convient). Puisque $L_\varphi^+ \subseteq L_{\partial\varphi}^+$, il suffit de s'intéresser à $\nu_N(\partial\varphi)$.

Reprenons pour cela la discussion de la première étape.

Dans le cas 1-A), en utilisant le fait que $v \leq 2(N - r) \leq 2N$ (cf point (iii) du théorème 2.1), l'inégalité (2.6) donne que

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq \nu_r(\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_0}) + 4N.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne alors que

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq M'_r + 4N.$$

Dans le cas 1-B), on est assuré par récurrence que $\nu_{r_i}(\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_1}) \leq M_{r_i}$ ($i = 1$ ou 2); l'inégalité (2.8) donne donc que

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq M'_{r_1} + M'_{r_2}.$$

Dans le cas 1-C), si le scindement $F_N = \text{Stab}R_1 * \langle t \rangle$ est φ -invariant, l'inégalité (2.11) donne que :

$$\begin{aligned} \nu_N(\partial\varphi) &\leq \nu_{N-1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}R_1}) + 2v_1 \\ &\leq M'_{N-1} + 2, \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité s'obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $v_1 \leq 2(N - \text{rgStab}R_1) = 1$.

Sinon, l'inégalité (2.12) donne que :

$$\begin{aligned} \nu_N(\partial\varphi) &\leq \nu_{N-1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}R_1}) + 2v_1 + \nu_{N-1}(\partial\varphi|_{\text{Stab}R_2}) + 2v_2 \\ &\leq 2M'_{N-1} + 4 \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité s'obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $v_i \leq 2(N - \text{rgStab}R_i) = 1$ ($i = 1$ ou 2).

Dans le cas 2), l'inégalité (2.14) donne que :

$$\begin{aligned} \nu_N(\partial\varphi) &\leq \nu_r(\partial\varphi|_{\text{Stab}Q_0}) + 2v + v' \\ &\leq M'_r + 2v + v' \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Le point (iii) du théorème 2.1 entraîne que $v \leq 2N$; appliqué à l'arbre T' , il donne $v' \leq 2N$. Finalement

$$\nu_N(\partial\varphi) \leq M_r + 6N.$$

Dans tous les cas, $\nu_N(\partial\varphi) \leq M'_N$, où :

$$M'_N = 2 \max\{M'_r | 1 \leq r \leq N-1\} + 6N.$$

□

Le fait que l'indice d'un automorphisme φ de F_N soit majoré par $N-1$ ⁵ entraîne qu'il y a au plus $2N$ classes isoglosses de points attractifs. En combinant ce fait au théorème 2.15, on obtient qu'il y a au plus $M_N + 2N$ classes isoglosses de points de $L_{\partial\varphi}^+$. Enfin, en appliquant ce résultat à φ^{-1} , on obtient le :

Corollaire 2.20. Il existe une constante K_N (qui ne dépend que de N) telle que si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ est tel que $\text{Fix}\bar{\varphi} = \text{Per}\bar{\varphi}$, alors il y a au plus K_N classes isoglosses d'éléments de L_φ et de $L_{\partial\varphi} \cap \partial\text{Fix}\varphi$.

A propos de la dépendance en N de M_N

En reprenant la preuve du théorème 2.15, on voit que la borne M_N obtenue est exponentielle ($2^N \leq M_N \leq 3^N$). Je pense que ce n'est pas du tout optimal : je conjecture que M_N est linéaire en N . L'exemple ci-dessous donne une famille d'automorphismes de F_N ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$) qui possèdent $2N-2$ classes isoglosses d'éléments de $L_\varphi^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$ et de $L_{\partial\varphi}^+ \cap \partial\text{Fix}\varphi$: on ne peut pas espérer mieux qu'une borne linéaire en N .

Exemple 2.21. $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ défini par $\varphi(a_i) = a_i u_i$ avec $u_1 = 1$, $u_2 = a_1$, $u_i = a_{i-1} u_{i-1} a_{i-1}^{-1}$ pour $3 \leq i \leq N$, ie :

$$\begin{aligned} a_1 &\mapsto a_1 \\ a_2 &\mapsto a_2 a_1 \\ a_3 &\mapsto a_3 a_2 a_1 a_2^{-1} \\ a_4 &\mapsto a_4 a_3 a_2 a_1 a_2^{-1} a_3^{-1} \\ &\vdots \\ a_N &\mapsto a_N a_{N-1} a_{N-2} \dots a_2 a_1 a_2^{-1} \dots a_{N-2}^{-1} a_{N-1}^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement par récurrence que :

⁵Voir [12], ou la section 2.2 du chapitre 1.

- $u_i \in \text{Fix}\varphi$,
- $\text{Fix}\varphi = \langle a_1, a_2 u_2 a_2^{-1}, a_3 u_3 a_3^{-1}, \dots, a_N u_N a_N^{-1} \rangle$,
- il y a $2N - 2$ classes isoglosses d'éléments de $L_\varphi^+ = L_{\partial\varphi}^+$; elles admettent comme représentants : $a_i u_i^{+\infty}, u_i^{-\infty}$ pour $2 \leq i \leq N$,
- il y a $2N - 2$ classes isoglosses dans $L_\varphi^- = L_{\partial\varphi}^-$; elles admettent comme représentants : $a_i u_i^{-\infty}, u_i^{+\infty}$ pour $2 \leq i \leq N$.

Chapitre 3

Exemples de comportements dynamiques

1 Dynamique au bord

1.1 Graphe dynamique

Définition

Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ tel que tous les points périodiques de $\overline{\varphi}$ sont en fait des points fixes. On associe à φ un graphe Γ_φ dont les sommets sont les classes isoglosses de points de $L_{\partial\varphi}$. On place une arête entre deux classes x_1 et x_2 s'il existe des représentants X_i de x_i et $X \in \partial F_N$ tel que $\omega_{\partial\varphi^{-1}}(X) = X_1$ et $\omega_{\partial\varphi}(X) = X_2$.

Le théorème 2.15 se traduit simplement par le fait que Γ_φ est un graphe fini. On appelle Γ_φ le **graphe dynamique** de φ .

Remarque 3.1. Dans [21], G. Levitt introduit un graphe pour coder la dynamique des homéomorphismes "dynamiquement simples" de l'ensemble de Cantor C : un homéomorphisme $f : C \rightarrow C$ est dynamiquement simple si l'ensemble $\text{Fix } f$ de ses points fixes est fini et si la suite f^n converge uniformément sur tout compact disjoint de $\text{Fix } f$. Lorsque $\text{Per } \varphi$ est trivial, une puissance $\partial\varphi^p$ est un homéomorphisme dynamiquement simple, et le graphe Γ_{φ^p} est le même que celui de [21] (dans ce cas, les points fixes de $\partial\varphi^p$ sont soit attractifs, soit répulsifs).

Dynamiques nord-sud et semi-nord-sud

Remarquons que $\partial\varphi$ a une dynamique nord-sud si, et seulement si Γ_φ est le graphe constitué de 2 sommets et d'une arête les reliant (cf figure 1).

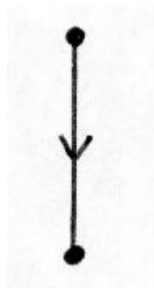


Fig. 1 – Graphe dynamique nord-sud

Si Γ_φ est le graphe constitué de 2 sommets et de 2 arêtes les reliant (une dans chaque sens), on dit que $\partial\varphi$ a une dynamique **semi-nord-sud** (cf figure 2). C'est par exemple le cas de l'automorphisme φ de $F_2 = \langle a, b \rangle$ défini par $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = aba$: voir dans la section 2.4, le cas où Φ est un twist de Dehn pour une discussion plus complète.

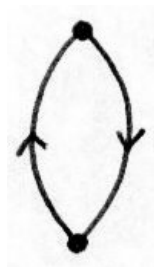


Fig. 2 – Graphe dynamique semi-nord-sud

1.2 Points paraboliques

Définition

Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$. S'il existe $X \in \mathcal{U}_{\partial\varphi}$ et $X_0 \in \partial F_N$ tels que $\omega_{\partial\varphi}(X) = \omega_{\partial\varphi}(X) = X_0$, on dit X_0 est un **point parabolique**. Alors tout élément de la classe isoglosse x_0 de X_0 est aussi un point parabolique : on dit que x_0 est parabolique.

L'existence d'une classe isoglosse parabolique x_0 se traduit sur Γ_φ , par une boucle sur le sommet x_0 .

Structure d'un point parabolique

Proposition 3.2. Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, et $X_0 \in \text{Fix} \partial\varphi$ un point parabolique. Alors tout voisinage de X_0 dans ∂F_N contient une orbite $\{\partial\varphi^p(X) | p \in \mathbb{Z}\}$ entière (où X est un élément de $\mathcal{U}_{\partial\varphi}$).

Preuve. En effet, un point parabolique X_0 ne peut être ni attractif, ni répulsif. C'est donc un point fixe singulier, et d'après le théorème 2.15, c'est un point rationnel : il existe $u \in \text{Fix} \varphi$ tel que $X_0 = u^{+\infty}$.

Fixons un voisinage \mathcal{V} de X_0 . Considérons une orbite parabolique $\vartheta = \{\partial\varphi^p(X) | p \in \mathbb{Z}\}$ pour X_0 . Puisque X_0 est le point fixe attractif de ∂i_u , à condition de prendre k suffisamment grand, $\partial i_u^k(\vartheta)$ est contenu dans \mathcal{V} . Remarquons que puisque $u \in \text{Fix} \varphi$, $\partial i_u^k(\partial\varphi^p(X)) = \partial\varphi^p(u^k X)$, et donc que $\partial i_u^k(\vartheta)$ est une orbite parabolique pour X_0 . \square

Exemple d'un automorphisme de F_4 qui possède un point parabolique

Soit φ l'automorphisme de $F_4 = \langle a, b, c, d \rangle$ défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \quad a &\mapsto a \\ b &\mapsto ba \\ c &\mapsto ca^2 \\ d &\mapsto dca \end{aligned}$$

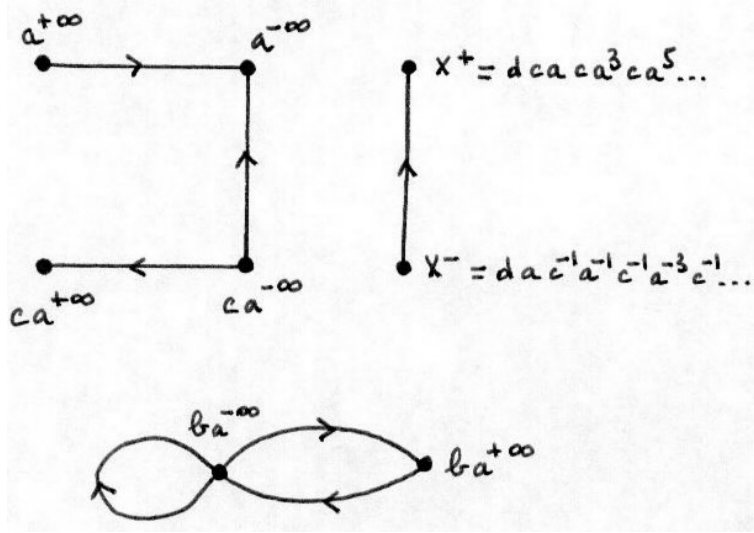
et son inverse :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad a &\mapsto a \\ b &\mapsto ba^{-1} \\ c &\mapsto ca^{-2} \\ d &\mapsto dac^{-1} \end{aligned}$$

On peut montrer que le sous-groupe laissé fixe par φ est $\text{Fix} \varphi = \langle a, bab^{-1}, cac^{-1} \rangle$. D'autre part, φ possède une seule classe isoglosse de points fixes attractifs (resp. répulsifs), dont un représentant est $X^+ = \omega_\varphi(d) = dcaca^3ca^5 \dots$ (resp $X^- = \omega_{\varphi^{-1}}(d) = dac^{-1}a^{-1}c^{-1}a^{-3} \dots$).

Remarquons que :

- $\omega_\varphi(b^{-1}) = \omega_\varphi(c^{-1}) = \omega_\varphi(d^{-1}) = a^{-\infty}$,
- $\omega_\varphi(c) = ca^{+\infty}$,
- $\omega_\varphi(b) = ba^{+\infty}$,
- $\omega_\varphi(bc^{-1}) = ba^{-\infty}$.
- $\omega_{\varphi^{-1}}(b^{-1}) = \omega_{\varphi^{-1}}(c^{-1}) = a^{+\infty}$,
- $\omega_{\varphi^{-1}}(c) = \omega_{\varphi^{-1}}(d^{-1}) = ca^{-\infty}$,
- $\omega_{\varphi^{-1}}(b) = ba^{-\infty}$,

Fig. 3 – Graphe dynamique pour φ

$$- \omega_{\varphi^{-1}}(bc^{-1}) = ba^{+\infty}.$$

En fait, il n'est pas difficile de se persuader qu'il y a 5 classes isoglosses d'éléments de L_{φ}^+ (dont des représentants sont X^+ , $a^{-\infty}$, $ca^{+\infty}$, $ba^{+\infty}$, $ba^{-\infty}$) et 5 classes isoglosses d'éléments de L_{φ}^- (dont des représentants sont X^- , $a^{+\infty}$, $ca^{-\infty}$, $ba^{-\infty}$, $ba^{+\infty}$).

Remarquons que $\varphi(bad^{-1}) = bac^{-1} \cdot d^{-1}$ est un scindement pour φ , et donc $\omega_{\varphi}(bad^{-1}) = \omega_{\varphi}(bac^{-1}) = ba^{-\infty}$. D'autre part, $ba \cdot d^{-1}$ est un scindement pour φ^{-1} , et donc $\omega_{\varphi^{-1}}(bad^{-1}) = \omega_{\varphi^{-1}}(ba) = ba^{-\infty}$. On obtient ainsi une orbite parabolique dans F_4 pour le point fixe $ba^{-\infty}$. On obtient de même une orbite parabolique dans ∂F_4 en considérant par exemple l'orbite de $bad^{-1}a^{+\infty}$.

La figure 3 représente le graphe dynamique Γ_{φ} .

2 Automorphismes géométriques

2.1 Groupe modulaire d'une surface orientable

Considérons une surface orientable S , à bord éventuellement non vide. On définit le **groupe modulaire**¹ de S par :

$$\text{Mod}(S) = \text{Homeo}^+(S)/\text{Homeo}_0(S)$$

¹encore appelé "mapping class group"

où $\text{Homeo}^+(S)$ désigne le groupe des homéomorphismes de S préservant l'orientation, et $\text{Homeo}_0(S)$ le sous-groupe des homéomorphismes de S homotopes à id_S (l'homotopie étant libre sur bord, lorsque S est une surface à bord). On peut aussi considérer $\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}_0(S)$, où $\text{Homeo}(S)$ désigne le groupe des homéomorphismes de S .

Si S possède au moins une composante de bord, son groupe fondamental $\pi_1(S)$ est un groupe libre F_N . Un élément $f \in \text{Mod}(S)$ induit naturellement un automorphisme extérieur de $\pi_1(S) = F_N$. L'application obtenue :

$$J : \text{Mod}(S) \rightarrow \text{Out}^+(F_N)$$

est injective, mais n'est pas surjective en général (en effet, les automorphismes extérieurs dans l'image doivent permuter les classes de conjugaisons représentant les courbes de bord dans S). Retenons que $\text{Out}(F_N)$ contient le groupe modulaire de toute surface à bord, de groupe fondamental F_N .

2.2 Approche à la Nielsen-Thurston des homéomorphismes des surfaces

Considérons un homéomorphisme f_0 d'une surface orientable S compacte, avec éventuellement un bord non vide. Le théorème de Thurston sur la classification des homéomorphismes des surfaces affirme qu'il existe un homéomorphisme f'_0 de S isotope à f_0 tel que : il existe un ensemble fini de courbes simples essentielles (ie non homotopes à une composante de bord) non deux à deux homotopes et qui ne s'intersectent pas deux à deux, qui découpe S en sous-surfaces S_i , et il existe une puissance f_0^p dont la restriction à chacune des sous-surfaces est :

- soit périodique,
- soit irréductible (ie f_0^p et ses puissances ne fixent, à homotopie près, aucune courbe essentielle de la sous-surface) : dans ce cas, Thurston donne une forme normale pour f_0 , dite pseudo-Anosov.

Homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface sans bord

Considérons un homéomorphisme pseudo-Anosov f_0 d'une surface hyperbolique fermée S ; f_0 préserve deux feuilletages singuliers, transverses, mesurés \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^- respectivement dilaté d'un facteur $\lambda > 1$ et contracté du facteur λ^{-1} . Le revêtement universel de S est le disque de Poincaré D , (muni de la métrique hyperbolique, c'est \mathbb{H}^2). On note $\tilde{\mathcal{F}}^+$, $\tilde{\mathcal{F}}^-$, les relevés de \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^- à D : ce sont deux feuilletages singuliers, transverses, mesurés de D . Soit f un relevé de f_0 au revêtement universel ; f induit un homéomorphisme ∂f du bord S_∞ de D . Trois situations peuvent se présenter :

1. une puissance de f fixe une singularité p de \mathcal{F}^+ ;
2. une puissance de f fixe un point p dans D qui n'est pas une singularité de \mathcal{F}^+ ;
3. f n'a pas de point périodique dans D .

Dans le premier cas, une puissance f^r laisse fixe les $k \geq 3$ rayons singuliers de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ (et les $k \geq 3$ rayons singuliers de $\tilde{\mathcal{F}}^-$) partant de p . Ces k rayons atteignent k points de S^1 qui sont des points fixes attractifs de ∂f^r ; de même, les k rayons singuliers de $\tilde{\mathcal{F}}^-$ définissent k points fixes répulsifs de ∂f^r . Finalement, ∂f possède $2k$ points périodiques sur S_∞ , alternativement attractifs et répulsifs (voir figure 4).

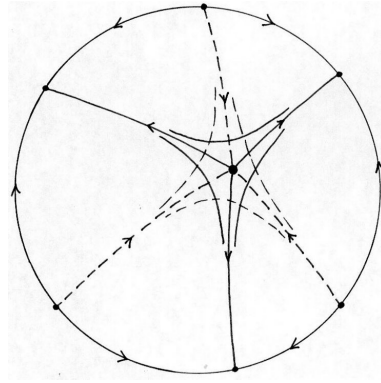


Fig. 4 – Relevé fixant une singularité

Dans le deuxième cas, le point p est à l'intersection d'une feuille régulière de \mathcal{F}^+ et d'une feuille régulière de \mathcal{F}^- . Une puissance f^r fixe donc les 4 rayons partant de p et contenus dans ces feuilles, et ∂f^r fixe les 4 points de S^1 atteints par ces rayons, ceux atteints par les 2 rayons contenus dans la feuille de \mathcal{F}^+ étant attractifs, les 2 autres étant répulsifs. Finalement, ∂f possède 4 points périodiques sur S_∞ , alternativement attractifs et répulsifs (voir figure 5).

Le troisième cas est le cas générique. On peut montrer que ∂f^2 a une dynamique nord-sud : ∂f^2 possède deux points fixes sur S_∞ , un attractif a^+ et un répulsif a^- . Plus généralement, si φ est l'automorphisme de $\pi_1(S)$ couplé à f , on peut montrer que $\bar{\varphi}$ a une dynamique nord-sud sur $\pi_1(\bar{S}) = \pi_1(S) \cup \partial\pi_1(S)$.

Homéomorphisme pseudo-Anosov d'une surface à bord

Considérons maintenant un homéomorphisme pseudo-Anosov f_0 d'une surface hyperbolique à bord S . Le groupe fondamental de S est un groupe libre F_N . Le

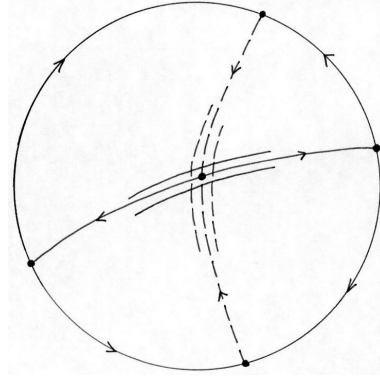


Fig. 5 – Relevé fixant un point qui n'est pas une singularité

revêtement universel \tilde{S} de S se plonge dans D ; en particulier, le bord $\partial\tilde{S}$ se plonge dans le bord S_∞ de D : $\partial\tilde{S}$ est un ensemble de Cantor, qui s'identifie avec ∂F_N .

Comme précédemment, f_0 laisse invariant deux feuilletages singuliers, transverses, mesurés \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^- respectivement dilaté d'un facteur $\lambda > 1$ et contracté du facteur λ^{-1} . Notons que f_0 permute les composantes de bord de S , et que chaque composante de bord possède une singularité des feuilletages (voir figure 6). On note $\tilde{\mathcal{F}}^+$, $\tilde{\mathcal{F}}^-$, les relevés de \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^- à \tilde{S} . Soit f un relevé de f_0 au revêtement universel ; f induit un homéomorphisme ∂f du bord $\partial\tilde{S}$. Les trois situations déjà discutées dans le cas d'une surface sans bord se présentent ici encore.

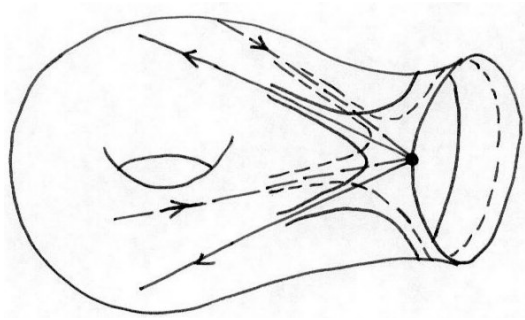


Fig. 6 – Feuilletages d'un pseudo-Anosov sur le tore à un trou

Si f fixe une singularité de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ qui n'est pas un relevé d'une singularité de \mathcal{F}^+ sur une composante de bord de S , le raisonnement que l'on a fait pour les surfaces fermées reste valable.

Considérons une singularité p_0 de \mathcal{F}^+ et de \mathcal{F}^- située sur une composante de bord (voir figure 7. Il existe une puissance f_0^r qui fixe p_0 , la composante de

bord contenant p_0 , les k rayons singuliers de \mathcal{F}^+ et les k rayons singuliers de \mathcal{F}^- pointés en p_0 . Soit p un relevé de p_0 , et f un relevé de f_0^r qui fixe p . Considérons l'homéomorphisme ∂f de $\partial\tilde{S}$. Les k rayons singuliers de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ (resp. de $\tilde{\mathcal{F}}^-$) issus de p atteignent k points de $\partial\tilde{S}$ qui sont attractifs (resp. répulsifs). En fait, ∂f possède une infinité dénombrable de points fixes attractifs (resp. répulsifs) : ce sont les points de $\partial\tilde{S}$ atteints par les rayons constitués :

- d'un chemin initial relevant un lacet de S pointé en p_0 parcourant un certain nombre de fois la composante de bord contenant p_0 dans un sens ou l'autre (ce chemin relie p à un autre relevé p' de p_0),
- puis d'un rayon singulier de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ (resp. de $\tilde{\mathcal{F}}^-$) pointé en p' .

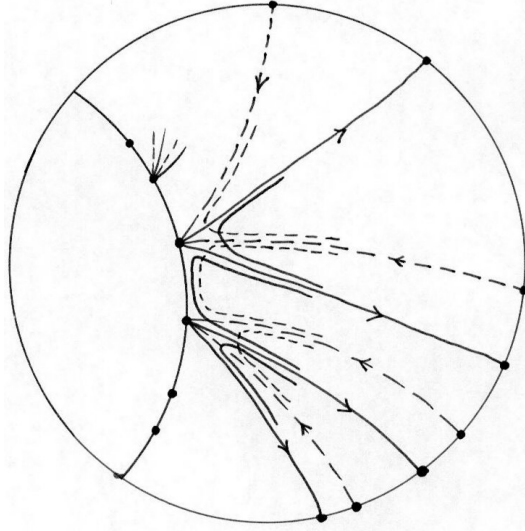


Fig. 7 – Relevé d'une courbe de bord et relevés des feuilletages

Considérons l'automorphisme extérieur Φ de F_N induit par f_0 , et l'automorphisme $\varphi \in \Phi$ couplé à f . En identifiant F_N avec $\pi_1(S, p_0)$, on voit que $\text{Fix } \varphi = \langle g \rangle$ où g est l'élément de F_N représenté par un lacet γ pointé en p_0 parcourant la composante de bord une fois.

Bien entendu, on n'obtient que k classes isoglosses de points fixes attractifs (resp. répulsifs) pour $\partial\varphi$: le fait que deux rayons singuliers R et R' de $\tilde{\mathcal{F}}^+$ issus de p et de p' et relevant un même rayon de \mathcal{F}^+ diffèrent d'un sous-chemin initial relevant γ^q ($q \in \mathbb{Z}$) se traduit par le fait que les points X et X' de $\partial F_N \simeq \partial\tilde{S}$ diffèrent d'une translation par $g^q \in \text{Fix } \varphi$.

Enfin, on obtient deux points fixes singuliers. Ce sont les points $g^{\pm\infty} \in \partial F_N$: ils sont atteints par les deux rayons issus de p entièrement contenus dans des relevés

de γ .

Le graphe dynamique Γ_φ possède $2k$ sommets (k classes isoglosses attractives et k classes isoglosses répulsives). Remarquons $\partial\varphi$ préserve l'ordre cyclique sur $\partial F_N = \partial\tilde{S}$ induit par le plongement de $\partial\tilde{S}$ dans le cercle S_∞ ; sur S_∞ , les points fixes de $\partial\varphi$ sont alternativement attractifs et répulsifs. On en déduit que Γ_φ est homéomorphe à un cercle, sur lequel les sommets sont alternativement attractifs et répulsifs (voir figure 8).

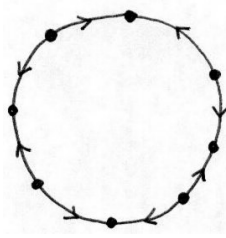


Fig. 8 – Graphe dynamique d'un relevé fixant une singularité

Remarquons aussi que l'une des deux composantes de $S_\infty \setminus \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\}$ contient tous les points fixes réguliers de $\partial\varphi$; de plus les points $g^{\pm\infty}$ sont dans l'adhérence de l'ensemble des points fixes réguliers.

Le cas où une puissance de f fixe un point de \tilde{S} qui n'est pas une singularité se traite comme dans le cas d'une surface fermée. En particulier, si φ désigne l'automorphisme couplé à f , $\text{Fix}\varphi$ est trivial, et le graphe Γ_φ possède 4 sommets (2 points attractifs et 2 points répulsifs). En utilisant le fait que $\partial\varphi$ préserve l'ordre cyclique induit par le plongement de ∂F_N dans S_∞ , on voit que Γ_φ est homéomorphe à un cercle, sur lequel les sommets sont alternativement attractifs et répulsifs (voir figure 9).

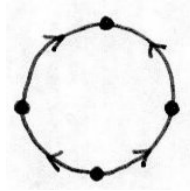


Fig. 9 – Graphe dynamique quadripolaire

Dans le cas où f ne possède pas de point périodique dans \tilde{S} , on peut montrer que $\partial\varphi^2 = \partial f^2$ (où φ est l'automorphisme couplé à f) a une dynamique nord-sud sur ∂F_N : $\partial\varphi^2$ possède deux points fixes $a^+, a^- \in \partial F_N$ et si $X \in \partial F_N \setminus \{a^+, a^-\}$,

$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \partial\varphi^k(X) = a^\pm$. En particulier, le graphe Γ_φ est le graphe constitué de deux sommets et d'une arête les joignant. Ce cas recouvre cependant deux phénomènes assez disjoints. Le premier est le même que pour les surfaces à bord : $\overline{\varphi}$ a une dynamique nord-sud sur $\overline{F_N}$. Le second cas est celui où f agit par translation le long d'une ligne bi-infinie l dans \tilde{S} relevant une composante de bord de S : on choisit comme point de base la singularité p_0 des feuilletages invariants de f_0 sur cette composante, et on désigne par γ un lacet pointé en p_0 qui parcourt une fois la composante de bord, et par g l'élément de $\pi_1(S, p_0) = F_N$ qu'il représente. Alors $\varphi = i_{g^q} \circ \varphi_0$ où $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, et φ_0 est l'automorphisme couplé à un relevé de f_0 fixant un relevé de p_0 sur l . En particulier, $\text{Fix}\varphi = \langle g \rangle$, $a^+ = g^{\varepsilon\infty}$, $a^- = g^{-\varepsilon\infty}$ où ε est le signe de q .

2.3 Automorphismes extérieurs de F_2

Considérons un tore T . On peut voir T comme le quotient du plan \mathbb{R}^2 par le réseau \mathbb{Z}^2 . Tout élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ préserve le réseau \mathbb{Z}^2 et induit donc un homéomorphisme (dit linéaire) de T . En fait, toute classe d'isotopie d'homéomorphisme de T contient un et un seul homéomorphisme linéaire : on obtient ainsi une section de $GL_2(\mathbb{Z})$ dans $\text{Homeo}(T)$, et cette section induit un isomorphisme entre $GL_2(\mathbb{Z})$ et $\text{Mod}(T)$.

On considère la surface T_0 obtenue en enlevant un disque ouvert à un tore T . Alors $\pi_1(T_0) = F_2$. Un résultat fameux de Nielsen (cf [30]) affirme que, dans ce cas, les morphismes

$$\begin{array}{ccc} J : \text{Mod}(T_0) & \rightarrow & \text{Out}(F_2) \\ f & \mapsto & \Phi \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} Ab : \text{Out}(F_2) & \rightarrow & GL_2(\mathbb{Z}) \\ \Phi & \mapsto & M \end{array}$$

sont en fait des isomorphismes. On obtient bien sûr des isomorphismes en se restreignant à $\text{Mod}^+(T_0)$, $\text{Out}^+(F_2)$ et $SL_2(\mathbb{Z})$.

On peut construire directement l'isomorphisme entre $\text{Mod}(T_0)$ et $GL_2(\mathbb{Z})$ de la manière suivante. On considère un homéomorphisme f de T_0 : f laisse le bord invariant. En écrasant le bord de T_0 en un point p , on obtient T , et f induit un homéomorphisme de T fixant p . On regarde alors l'unique homéomorphisme linéaire dans sa classe d'isotopie.

Pour étudier $\text{Out}^+(F_2)$, on peut donc utiliser la classification de Nielsen-Thurston des homéomorphismes des surfaces, ou les résultats classiques sur $SL_2(\mathbb{Z})$. Je résume dans le tableau 3.1 les correspondances entre ces différents points de vue. Pour la cor-

type de f	croissance de Φ	$ tr(M) $
pseudo-Anosov	exponentielle	> 2
f ou f^2 twist de Dehn	linéaire	$= 2$
périodique	nulle	< 2

TAB. 3.1 – Correspondances entre f , Φ et M

respondance entre le point de vue Nielsen-Thurston et $SL_2(\mathbb{Z})$, je renvoie le lecteur à l'introduction de [7].

Ainsi, un élément de $\Phi \in \text{Out}^+(F_2)$ qui n'est pas périodique, est soit induit par un twist de Dehn (ou une racine carrée d'un twist de Dehn) sur le tore, soit induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov du tore.

2.4 Dynamique des automorphismes de F_2

Dans cette section, j'étudie la dynamique des automorphismes de F_2 sur ∂F_2 et \overline{F}_2 , en utilisant l'analyse précédente de $\text{Out}^+(F_2)$.

Remarquons que si $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$, alors $\varphi^2 \in \text{Aut}^+(F_N)$. La dynamique d'un automorphisme φ de F_N qui n'est pas dans $\text{Aut}^+(F_N)$ se comprend facilement à partir de la dynamique de φ^2 . Pour cette raison, on se restreint à étudier la dynamique des automorphismes dans $\text{Aut}^+(F_2)$.

Soit $\varphi \in \text{Aut}^+(F_2)$, et $\Phi \in \text{Out}^+(F_2)$ sa classe extérieure.

Φ est périodique.

Les éléments de torsion de $SL_2(\mathbb{Z})$ sont d'ordre 1,2,3,4 ou 6². Il existe donc $p \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ tel que $\Phi^p = Id$, et par suite il existe $u \in F_2$ tel que $\varphi^p = i_u$.

Si $u \neq 1$, $\partial\varphi^p$ a donc une dynamique nord-sud de $u^{-\infty}$ vers u^∞ . Donc $\partial\varphi$ possède deux points périodiques ($u^{\pm\infty}$), et le sous-groupe laissé fixe par φ est soit trivial, soit infini cyclique, engendré par \sqrt{u} .

Sinon, $\varphi^p = id$ ³. Alors :

- $\text{Fix}\varphi$ est un facteur libre de F_2 (cela découle d'un résultat plus général de J. Dyer and G. Scott qui affirme que le sous-groupe fixe d'un automorphisme périodique de F_N est toujours un facteur libre de F_N ; cf [9]) ;
- les points fixes de $\partial\varphi$ sont singuliers (puisque ceux de ∂id le sont aussi !).

²cela peut se voir facilement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton par exemple.

³Dans ce cas, on peut vérifier que $p \neq 6$.

Si $\text{Fix}\varphi$ est trivial, $\partial\varphi$ n'a pas de point fixe. Si $\text{Fix}\varphi$ est de rang un, on désigne par u un générateur ; alors $\text{Fix}\partial\varphi = \{u^{\pm\infty}\}$. Le cas où $\text{Fix}\varphi$ est de rang 2 correspond à $\varphi = id$, puisque $\text{Fix}\varphi$ est un facteur libre.

La discussion précédente montre en particulier le :

Lemme 3.3. Soit $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$, $\varphi \neq id$, $X \in \partial F_2$ un point fixe de $\partial\varphi$, et $\Phi \in \text{Out}(F_2)$ l'automorphisme extérieur défini par φ . Si Φ est périodique, alors X est rationnel.

Φ est un twist de Dehn.

Un argument de caractéristique d'Euler montre qu'à homéomorphisme près, il n'existe qu'une seule courbe simple fermée essentielle sur le tore à un trou T . On en fixe une : quitte à faire une conjugaison, on peut donc supposer qu'elle est laissée fixe par f . On choisit comme point de base pour T un point sur la courbe, et on note a l'élément de $\pi_1(T)$ défini par la courbe. On complète en une base $\{a, b\}$ de $\pi_1(T) \cong F_2$. Considérons $d \in \text{Aut}(F_2)$ défini par

$$\begin{aligned} d: \quad a &\mapsto a \\ b &\mapsto ba, \end{aligned}$$

et $D \in \text{Out}(F_2)$ l'automorphisme extérieur induit par d . Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ tel que Φ soit conjugué à D^n . On va donc étudier la dynamique des automorphismes dans la classe extérieure D^n .

On représente D^n par un train-track f_0 de la rose R_2 : on identifie les arêtes de R_2 avec les générateurs a et b de F_2 , et on définit f_0 comme l'identité sur a , et envoyant linéairement b sur ba^n . Le revêtement universel \tilde{R}_2 de R_2 s'identifie naturellement avec le graphe de Cayley de F_2 associé au système de générateur $\{a, b\}$; en particulier, on identifie les sommets de \tilde{R}_2 et les éléments de F_2 . On vérifie que le relevé f de f_0 couplé à d^n est celui qui fixe le sommet 1.

On obtient l'arbre invariant T associé à D en contractant dans \tilde{R}_2 tous les relevés de l'arête a . On note $p : \tilde{R}_2 \rightarrow T$ la projection ainsi définie. Soit \mathcal{H} l'isométrie de T couplée à d^n : $\mathcal{H} = p \circ f$. Rappelons que ∂T s'injecte dans ∂F_2 : on note $j : \partial T \rightarrow \partial F_2$ cette injection comme dans le théorème 2.1.

On considère un automorphisme $i_m \circ d^n \in D^n$ ($m \in F_2$), et l'isométrie $m\mathcal{H}$ de T couplée à $i_m \circ d^n$.

Si $m\mathcal{H}$ est hyperbolique, on désigne par A son axe dans T orienté de $A^- \in \partial T$ vers $A^+ \in \partial T$. Alors $\partial(i_m \circ d^n)$ (et même $\overline{i_m \circ d^n}$) a une dynamique nord-sud de $j(A^-)$ vers $j(A^+)$.

Si $m\mathcal{H}$ est elliptique, soit $P \in T$ un point fixe de $m\mathcal{H}$. Si $w \in F_2$ est un sommet de \tilde{R}_2 qui se projette sur P , les éléments de F_2 qui se projettent sur P sont

de la forme wa^k , $k \in \mathbb{Z}$. Le fait que P soit un point fixe de $m\mathcal{H}$ se traduit donc par l'existence d'un entier k tel que $md^n(w) = wa^k$. Donc m et a^k sont d^n -conjugués, ie $i_m \circ d^n$ est isogrédié à $i_{a^k} \circ d^n$ (cf lemme 1.3). On va donc étudier plus en détail les automorphismes $i_{a^k} \circ d^n$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'inverse de $i_{a^k} \circ d^n$ est $i_{a^{-k}} \circ d^{-n}$. Remarquons que :

$$\begin{array}{lll} i_{a^k} \circ d^n : & a & \mapsto a \\ & b & \mapsto a^k b a^{n-k} \\ & b^{-1} & \mapsto a^{k-n} b^{-1} a^{-k} \end{array} \quad \begin{array}{lll} i_{a^{-k}} \circ d^{-n} : & a & \mapsto a \\ & b & \mapsto a^{-k} b a^{k-n} \\ & b^{-1} & \mapsto a^{n-k} b^{-1} a^k. \end{array}$$

Le comportement dynamique de $\partial(i_{a^k} \circ d^n)$ dépend donc fortement du signe de k et de $(n - k)$.

Remarque 3.4. On considère l'involution

$$\begin{array}{ll} \sigma : & a \mapsto a^{-1} \\ & b \mapsto b^{-1}. \end{array}$$

On vérifie facilement que $i_{a^k} \circ d^n$ et $i_{a^{n-k}} \circ d^n$ sont conjugués par σ .

1^{er} cas : $k(n - k) = 0$. D'après la remarque 3.4, d^n et $i_{a^n} \circ d^n$ sont conjugués par σ (en fait d^n et $i_{a^n} \circ d^n$ sont isogrédié : en effet $i_{a^n} \circ d^n = i_{b^{-1}} \circ d^n \circ i_b$). On étudiera donc explicitement seulement d^n .

On voit que $\text{Fix } d^n = \langle a, bab^{-1} \rangle$ est de rang 2 : d^n est donc d'indice maximal. En particulier, $\text{Fix } \partial d^n = \partial \langle a, bab^{-1} \rangle$: c'est un sous-ensemble de Cantor de ∂F_2 .

Remarque 3.5. Puisque d^n est d'indice maximal, les classes d'isogrédié de D^n différentes de celle de d^n sont d'indice négatif ou nul ⁴.

Soit $X \in \mathcal{U}_{\partial d^n}$, x_0 le plus long préfixe de X qui soit dans $\text{Fix } d^n$, et Y le suffixe correspondant : $X = x_0 Y$. Alors $Y \in \partial_b F_2$ ou $\partial_{b^{-1}} F_2$.

- Si $Y \in \partial_b$, alors $\omega_{\partial d^n}(Y) = ba^{+\infty}$ et $\omega_{\partial d^{-n}}(Y) = ba^{-\infty}$.
- Si $Y \in \partial_{b^{-1}}$, alors $\omega_{\partial d^n}(Y) = a^{-\infty}$ et $\omega_{\partial d^{-n}}(Y) = a^{+\infty}$.

Donc il y a 2 classes isoglosses dans $L_{\partial d^n}^+$, dont des représentants sont $ba^{+\infty}$ et $a^{-\infty}$, et 2 classes isoglosses dans $L_{\partial d^n}^-$, dont des représentants sont $ba^{-\infty}$ et $a^{+\infty}$.

La figure 10 donne les graphes dynamiques $\Gamma_{i_{a^k} \circ d^n}$ dans ces cas.

2^e cas : $k(n - k) < 0$. Supposons pour commencer que $k > n$. Le sous-groupe fixe est $\text{Fix}(i_{a^k} \circ d^n) = \langle a \rangle$, de rang 1 ; en particulier $i_{a^k} d^n$ n'est pas isogrédié à d^n , et donc d'indice négatif ou nul (cf remarque 3.5). Finalement $\text{ind}(i_{a^k} \circ d^n) = 0$.

Remarquons que $\omega_{i_{a^k} \circ d^n}(b) = \omega_{i_{a^k} \circ d^n}(b^{-1}) = a^{+\infty}$ et $\omega_{i_{a^k} \circ d^n}(b) = \omega_{i_{a^k} \circ d^n}(b^{-1}) = a^{-\infty}$. En écrivant un élément $X \in \partial F_2$ comme un mot infini réduit dans la base $\{a, b\}$, on en déduit facilement que $\partial(i_{a^k} \circ d^n)$ a une dynamique nord-sud de $a^{-\infty}$ vers $a^{+\infty}$.

⁴cf [12] ou la section 2.2 du chapitre 1.

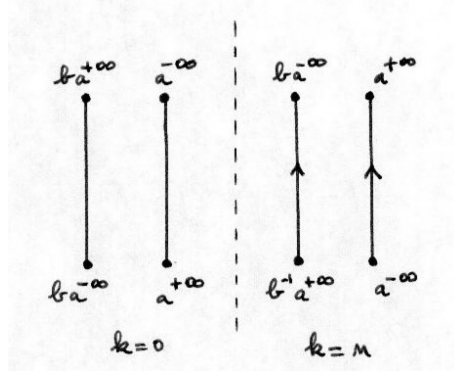


Fig. 10 – Graphes dynamiques pour $i_{a^k} \circ d^n$ pour $k(n-k) = 0$

Le cas où $k < 0$ se ramène à ce qui précède en utilisant la conjugaison par σ (cf remarque 3.4) : on obtient une dynamique nord-sud pour $\partial(i_{a^k} \circ d^n)$ de a^∞ vers $a^{-\infty}$.

La figure 11 donne les graphes dynamiques $\Gamma_{i_{a^k} \circ d^n}$ dans ces cas.

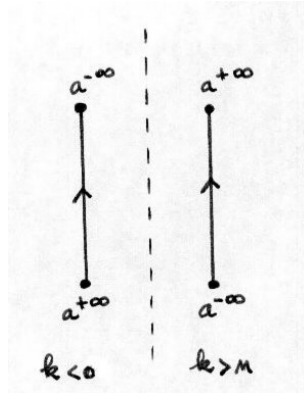


Fig. 11 – Graphes dynamiques pour $i_{a^k} \circ d^n$ pour $k(n-k) < 0$

3^e cas : $k(n-k) > 0$, ie $0 < k < n$. Comme dans le deuxième cas, $\text{Fix}(i_{a^k} \circ d^n) = \langle a \rangle$, et par conséquent $\text{ind}(i_{a^k} \circ d^n) = 0$.

En revanche, maintenant $\omega_{i_{a^k} \circ d^n}(b) = a^{+\infty}$, $\omega_{i_{a^k} \circ d^n}(b^{-1}) = a^{-\infty}$, $\omega_{(i_{a^k} \circ d^n)^{-1}}(b) = a^{-\infty}$ et $\omega_{(i_{a^k} \circ d^n)^{-1}}(b^{-1}) = a^{+\infty}$. En écrivant un point $X \in \partial F_2$ comme un mot infini réduit dans la base $\{a, b\}$, on voit que $\omega_{\partial(i_{a^k} \circ d^n)}(X)$ et $\omega_{\partial(i_{a^k} \circ d^n)^{-1}}(X)$ ne dépend que de la première occurrence d'une lettre b ou b^{-1} dans X : si c'est b , alors $\omega_{\partial(i_{a^k} \circ d^n)}(X) = a^{+\infty}$ et $\omega_{\partial(i_{a^k} \circ d^n)^{-1}}(X) = a^{-\infty}$, et si c'est b^{-1} , alors $\omega_{\partial(i_{a^k} \circ d^n)}(X) = a^{-\infty}$ et $\omega_{\partial(i_{a^k} \circ d^n)^{-1}}(X) = a^{+\infty}$.

Les points fixes de $\partial(i_{a^k} \circ d^n)$ sont donc attractifs pour certains points dans leur voisinage, répulsifs pour d'autres, et $\partial(i_{a^k} \circ d^n)$ a une dynamique semi-nord-sud entre a^∞ et $a^{-\infty}$.

La figure 12 donne le graphe dynamique $\Gamma_{i_{a^k} \circ d^n}$ dans ce cas.

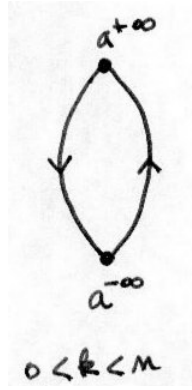


Fig. 12 – Graphes dynamiques pour $i_{a^k} \circ d^n$ pour $k(n - k) > 0$

Remarque 3.6. Remarquons que les automorphismes de D n'ont pas de dynamique semi-nord-sud. Pour obtenir des dynamiques semi-nord-sud, il faut considérer une puissance non triviale de D . C'est un fait général que lorsqu'on considère les puissances Φ^n d'un automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(F_N)$, il peut apparaître de plus en plus de classes d'isogrédiences non génériques (ie telle que $\partial\varphi$ n'a pas une dynamique nord-sud). Mais comme l'indice de l'automorphisme extérieur Φ^n est majoré par $N - 1$ ⁵, ces classes d'isogrédiences sont toutes, sauf un nombre fini, d'indice nul.

Si $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$ est tel que Φ est une racine carrée d'un twist de Dehn qui n'est pas un twist de Dehn, on comprend la dynamique de φ à partir de la dynamique de φ^2 .

Φ est à puissances irréductibles.

Dans ce cas Φ est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov f du tore à un trou T_0 et on est ramené à la discussion de la section 2.2. Remarquons qu'ici il y a une seule composante de bord, et une seule singularité p_0 pour les feuilletages \mathcal{F}^+ , \mathcal{F}^- , dont sont issus 2 rayons singuliers attractifs et 2 rayons singuliers répulsifs. Il y a une classe d'isogrédiences d'indice maximal : un représentant φ dans cette classe a un sous-groupe fixe de rang 1 (correspondant au bord de T_0), 2 classes

⁵cf [12] ou la section 2.2 du chapitre 1.

isoglosses de points attractifs (correspondant aux rayons singuliers attractifs) et 2 classes isoglosses de points répulsifs (correspondant aux rayons singuliers répulsifs).

Les classes d'isogréissance d'indice nul sont obtenues de deux manières distinctes. Il y a celles qui sont couplées aux relevés de f fixant un point p à l'intersection de 2 feuilles régulières des feuilletages $\tilde{\mathcal{F}}^+$ et $\tilde{\mathcal{F}}^-$, et fixant les 4 rayons issus de p contenus dans ces 2 feuilles. Et il y a celles qui donnent une dynamique nord-sud dont les points fixes sont les bouts d'une ligne relevant le bord de T_0 .

Chapitre 4

Sous-groupes de $\text{Aut}(F_N)$ fixant un point de ∂F_N

1 Généralités

Dans ce chapitre, je m'intéresse à la question suivante : si $X \in \partial F_N$, quels sont les automorphismes $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ tels que X soit point fixe de $\partial\varphi$. On désigne par $\text{Stab}(X)$ le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_N)$: c'est le sous-groupe de $\text{Aut}(F_N)$ constitué des automorphismes φ tels que $\partial\varphi(X) = X$. Plus généralement, quels sont les sous-groupes de F_N que l'on obtient comme stabilisateurs d'un point du bord de F_N , à isomorphisme près ? voire à conjugaison près par un automorphisme de F_N ?

Je donne des réponses partielles dans deux cas particuliers :

- quand le point X est un point fixe attractif d'un automorphisme à puissances irréductibles, $\text{Stab}(X) \simeq \mathbb{Z}$ (cf théorème 4.12) ;
- à isomorphisme près, je donne la liste des sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ qui sont des stabilisateurs d'un point du bord de F_2 (cf corollaire 4.14).

Les deux propositions suivantes rassemblent des faits élémentaires concernant le stabilisateur d'un point rationnel de ∂F_N (pour la première), ou d'un point non rationnel (pour la seconde), que je serai amené à utiliser par la suite.

Proposition 4.1. Soit $X \in \partial F_N$ un point rationnel. Alors le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_N)$ s'identifie au stabilisateur de \sqrt{X} dans $\text{Aut}(F_N)$.

Preuve. On pose $x = \sqrt{X}$. Il est clair que si $x \in \text{Fix}(\varphi)$, alors $\partial\varphi$ fixe $X = x^{+\infty}$. Réciproquement, si $\partial\varphi$ fixe $X = x^{+\infty}$, alors $x^{+\infty} = \varphi(x)^{+\infty}$. Donc, $x = \sqrt{\varphi(x)^{+\infty}} = \sqrt{\varphi(x)}$, ie il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi(x) = x^p$. Puisque φ est un automorphisme, nécessairement $p = 1$, ie $\varphi(x) = x$. \square

Proposition 4.2. Soit $X \in \partial F_N$ un point non rationnel. Alors le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_N)$ s'injecte dans $\text{Out}(\Gamma)$ par la surjection canonique $\text{ext} : \text{Aut}(F_N) \rightarrow \text{Out}(F_N)$.

Preuve. Si X est point fixe de $\partial\varphi$ et de $\partial(i_u \circ \varphi)$, où $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ et $u \in F_N$, $u \neq 1$, alors X est point fixe de ∂i_u , donc rationnel. \square

2 Point fixe attractif dans une strate exponentielle

2.1 Structure d'un point fixe attractif associé à une strate exponentielle.

Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré, muni de la filtration $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_t = G$. Soit $X \in \partial F_N$. Si v est un point de \tilde{G} , on note R_v le rayon pointé en v représentant X . Remarquons que si v_1, v_2 sont des points de \tilde{G} , $R_{v_1} \cap R_{v_2}$ est encore un rayon représentant X . Soit $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de \tilde{G} . On dit que (v_k) est **ordonnée selon** X si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_{v_{k+1}} \subseteq R_{v_k}$; en particulier, pour $k \geq 1$, $v_k \in R_{v_0}$.

Remarquons que si (v_k) est ordonnée selon X , $\text{hauteur}(R_{v_k})$ est une suite décroissante, donc stationnaire. On dit que X est **ultimement de hauteur** r s'il existe une suite (v_k) ordonnée selon X et qui tend vers X telle que $\text{hauteur}(R_{v_k})$ égale r pour k assez grand (remarquons que r est indépendant du choix d'une telle suite).

Proposition 4.3. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré, muni de la filtration $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_t = G$, représentant $\Phi \in \text{Out}(F_N)$. Soit $\varphi \in \Phi$, f le relevé de f_0 couplé à φ , et $X \in \partial F_N$ un point fixe attractif de φ ultimement de hauteur r . Alors il existe un point v de \tilde{G} tel que :

- i) $\text{hauteur}([v, f(v)]) = r$;
- ii) $[v, f^2(v)] = [v, f(v)] \cdot [f(v), f^2(v)]$;
- iii) $R_v = [v, f(v)] \cdot [f(v), f^2(v)] \cdot \dots \cdot [f^k(v), f^{k+1}(v)] \cdot \dots$ représente le point X ;
- iv) $[v, f(v)]$ possède un scindement dont les briques sont soit r -légales, soit des relevés de $\rho_r^{\pm 1}$; de plus, la première brique b de ce scindement est r -légale et vérifie $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f_{\#}^k(b)| = +\infty$.

Preuve. Puisque X est un point attractif de ∂f , il existe un sommet v_0 de \tilde{G} (suffisamment proche de X) tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(v_0) = X$. On note R_{v_0} le rayon pointé en v_0 qui représente X . On définit par récurrence v_{k+1} comme la projection

de $f(v_k)$ sur R_{v_0} . Remarquons que $[v_{k+1}, v_{k+2}] \subset [f(v_k), f(v_{k+1})] = f_{\#}([v_k, v_{k+1}]) \subset f([v_k, v_{k+1}])$.

On note $V_k = \{v \in \tilde{G} : f^i(v) \in [v_i, v_{i+1}], \forall 0 \leq i \leq k\}$. Il est clair que $f^k(V_k) \subset [v_k, v_{k+1}]$. On montre par récurrence qu'il y a en fait égalité. En effet $V_0 = [v_0, v_1]$. Supposons que $f^k(V_k) = [v_k, v_{k+1}]$; puisque $[v_{k+1}, v_{k+2}] \subset f([v_k, v_{k+1}])$, on a $[v_{k+1}, v_{k+2}] \subset f^{k+1}(V_k)$; on en déduit que $[v_{k+1}, v_{k+2}] \subset f^{k+1}(V_{k+1})$ puisque $x \in V_{k+1}$ si, et seulement si, $x \in V_k$ et $f^{k+1}(x) \in [v_{k+1}, v_{k+2}]$. En particulier, les V_k sont tous non vides. Finalement, les V_k forment une suite de compacts non vides emboîtés de $[v_0, v_1]$, donc $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k \neq \emptyset$. Choisissons $v \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$. Alors v vérifie les propriétés *ii*) et *iii*) (puisque pour tout k , $f^k(v) \in [v_k, v_{k+1}]$). La propriété *i*) résulte de la propriété *iii*) et du fait que X soit ultimement de hauteur r .

D'autre part, il existe K tel que pour $k \geq K$, $[f^k(v), f^{k+1}(v)]$ admet un scindement dont les briques sont soit des chemins r -légaux, soit des relevés de chemin de Nielsen ρ_r de la strate H_r s'il existe (cf lemme 3.2 de [26], lemme 6.1 de [22], lemme 4.2.6 de [3]). Le fait que X est un point attractif de $\partial \tilde{f}$, se traduit par $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^k(v), f^{k+1}(v)) = +\infty$ (cf [12] ou [24]). On en déduit qu'il existe une brique r -légale b telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |f_{\#}^k(b)| = +\infty$ dans le scindement de $[f^K(v), f^{K+1}(v)]$. Quitte à remplacer v par le point initial d'une telle brique dans $[f^K(v), f^{K+1}(v)]$, on a donc prouvé la propriété *iv*), et les propriétés *i*), *ii*) et *iii*) restent vérifiées. □

2.2 Cas d'un automorphisme à puissances irréductibles

Dans le cas où l'on s'intéresse à un automorphisme extérieur Φ à puissances irréductibles, il est possible de préciser la structure d'un point fixe attractif de $\varphi \in \Phi$. Traduisons tout d'abord la proposition 4.3.

Proposition 4.4. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track (absolu), représentant un automorphisme extérieur à puissances irréductibles $\Phi \in \text{Out}(F_N)$. Soit $\varphi \in \Phi$, f le relevé de f_0 couplé à φ , et $X \in \partial F_N$ un point fixe attractif de φ . Alors il existe un point v de \tilde{G} tel que $R_v = [v, f(v)] \cdot [f(v), f^2(v)] \cdot \dots \cdot [f^k(v), f^{k+1}(v)] \cdot \dots$ représente le point X . De plus $[v, f(v)]$ possède un scindement dont les briques sont

- soit des arêtes,
- soit des relevés du chemin de Nielsen $\rho^{\pm 1}$,

la première brique étant une arête.

Preuve. Reprenons les conclusions de la proposition 4.3 : il existe un point v dans \tilde{G} tel que le rayon $R_v = [v, f(v)] \cdot [f(v), f^2(v)] \cdot \dots \cdot [f^k(v), f^{k+1}(v)] \cdot \dots$ représente le point X . De plus $[v, f(v)]$ possède un scindement dont les briques sont soit légales,

soit des relevés du chemin de Nielsen $\rho^{\pm 1}$ de G , la première brique étant légale. Pour conclure, il suffit donc de scinder chaque brique légale en arêtes. \square

Maintenant, quitte à regrouper en une seule brique des briques successives qui sont des relevés de $\rho^{\pm 1}$, on obtient un scindement $[v, f(v)] = b_0 \cdot b_1 \cdot \dots \cdot b_q$ dont chaque brique est :

- soit une arête (on dit que b_i est **régulière**) ;
- soit un relevé d’une puissance ρ^{r_i} ($r_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) du chemin de Nielsen (on dit que b_i est **singulière**).

Remarquons que b_0 est une brique régulière, et qu’entre deux briques singulières, il y a toujours au moins une brique régulière. On appelle ce scindement, **le scindement adapté de** $[v, f(v)]$. En posant $b_{i,k} = f_{\#}^k(b_i)$ ($0 \leq i \leq q$, $k \in \mathbb{N}$), on obtient un scindement $[f^k(v), f^{k+1}(v)] = b_{0,k} \cdot b_{1,k} \cdot \dots \cdot b_{q,k}$.

Définition 4.5. *En conservant les notations précédentes, on appelle scindement adapté de R_v le scindement dont les $b_{i,k}$ sont les briques. Lorsque b_i est régulière (resp. singulière), on dit que $b_{i,k}$ l’est aussi.*

Remarque 4.6. Entre deux briques singulières du scindement adapté de R_v , il y a toujours au moins une brique régulière (puisque c’est le cas pour chaque $[f^k(v), f^{k+1}(v)]$, et que la première brique de $[f^k(v), f^{k+1}(v)]$ est régulière). Remarquons aussi que les briques singulières de R_v sont de longueur bornée (par la longueur de la plus longue brique singulière de $[v, f(v)]$).

3 Laminations

J’aurais besoin par la suite d’utiliser la notion de lamination attractive associée à une strate exponentielle d’un automorphisme extérieur de F_N . C’est un objet introduit en détail dans la section 3.1 de [3] ; on en trouve aussi une construction spécifique aux automorphismes à puissances irréductibles dans [2]. Je rappelle ici rapidement les définitions et les résultats que j’utiliserai par la suite.

3.1 Cas général

L’espace $\tilde{\mathcal{B}}$ est l’ensemble des paires de points distincts de ∂F_N ¹. On munit $\tilde{\mathcal{B}}$ de la topologie faible définie de la manière suivante. Si G est un graphe marqué, en utilisant l’identification (par le marquage) de ∂F_N avec $\partial \tilde{G}$, deux points de ∂F_N définissent une unique ligne B dans \tilde{G} . Si b est un sous-chemin fini de B , on définit $N(b)$ comme l’ensemble des lignes de \tilde{G} qui contiennent b comme sous-chemin. Les

¹Les définitions sont celles de la section 2.2 de [3].

$N(b)$ définissent une base de voisinage de B (et la topologie ainsi définie est indépendante du choix de G). L'**espace des lignes de F_N** , noté \mathcal{B} , est l'espace quotient (non séparé) de $\tilde{\mathcal{B}}$ par l'action diagonale de F_N .

Une ligne B de \tilde{G} est dite **birécurrente** si tout sous-chemin fini de B apparaît un infinité de fois comme sous-chemin de B dans chaque bout de B (pour être précis, il faudrait dire que pour tout sous-chemin w de B , on trouve dans chaque bout de B une infinité de relevé de $pr(w)$ où $pr : \tilde{G} \rightarrow G$ désigne la projection du revêtement ; on s'autorisera souvent par la suite cet abus de langage). Une ligne de \mathcal{B} est dite birécurrente s'il existe une ligne de \tilde{G} birécurrente la représentant (et dans ce cas, toute ligne de \tilde{G} représentant B est birécurrente).

Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ et $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track relatif amélioré représentant Φ , et H une strate exponentielle de G . La **lamination attractive** ² $\Lambda_{\Phi, H}^+$ associée à la strate H est définie comme l'adhérence dans \mathcal{B} d'une ligne birécurrente, non portée par un facteur libre de rang un fixé par Φ , dont un voisinage est attractif sous l'action de Φ ; une telle ligne est dite **générique** pour la lamination. On vérifie que cette définition est indépendante du choix d'une telle ligne, ainsi que du train-track relatif amélioré (dans le sens que si deux train-tracks relatifs améliorés représentent Φ , il existe une bijection naturelle entre leurs strates exponentielles ; on peut donc parler d'une strate exponentielle comme d'un objet attaché à l'automorphisme extérieur).

Si G est un graphe marqué, on désigne par $\Lambda_{\Phi, H}^+(G)$ l'ensemble des lignes de \tilde{G} représentant les lignes de $\Lambda_{\Phi, H}^+$: c'est la lamination en G -coordonnées. Un élément de $\Lambda_{\Phi, H}^+(G)$ est appelé une **feuille** de $\Lambda_{\Phi, H}^+(G)$; une feuille est dite générique si elle représente une ligne générique de $\Lambda_{\Phi, H}^+$; un sous-chemin fini d'une feuille est appelé un **segment** de feuille. Je définis le **langage laminaire** (en G -coordonnées) de la lamination $\Lambda_{\Phi, H}^+$ comme l'ensemble des (images par $pr : \tilde{G} \rightarrow G$ des) segments d'une feuille générique de $\Lambda_{\Phi, H}^+(G)$. On vérifie que le langage laminaire est indépendant de la feuille générique choisie. On le note $\mathcal{L}_{\Lambda_{\Phi, H}^+}(G)$.

Soit $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_N)$ et $g_0 : G \rightarrow G$ un représentant topologique de Ψ . On considère une strate exponentielle H de Φ , et $\Lambda_{\Phi, H}^+$ la lamination attractive associée. On note C la borne de simplification de g_0 . Si u est un chemin fini dans G , on désigne par $g_{0\#, C}(u)$ le sous-chemin de $g_{0\#}(u)$ obtenu en enlevant à $g_{0\#}(u)$ ses deux extrémités de longueur C . On dit que g_0 **stabilise le langage laminaire** $\mathcal{L}_{\Lambda_{\Phi, H}^+}(G)$ s'il existe une ligne B de \tilde{G} représentant une ligne générique de $\Lambda_{\Phi, H}^+$ telle que pour tout sous-chemin u de B , il existe un relevé de $pr(g_{0\#, C}(u))$ qui est encore un sous-chemin de B .

Lemme 4.7. Soit $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_N)$, et $\Lambda_{\Phi, H}^+$ une lamination attractive de Φ (asso-

²cf définition 3.1.5 de [3].

ciée à la strate exponentielle H de Φ). Alors Ψ stabilise la lamination $\Lambda_{\Phi, H}^+$ si, et seulement s'il existe un représentant topologique $g_0 : G \rightarrow G$ de Ψ qui stabilise le langage laminaire $\mathcal{L}_{\Lambda_{\Phi, H}^+}(G)$.

La preuve de ce lemme se trouve en substance dans la section 3 de [3].

3.2 Cas des automorphismes à puissances irréductibles

Dans le cas des automorphismes extérieurs de F_N à puissances irréductibles ³, on peut préciser la construction de la lamination attractive ⁴.

Soit $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ un automorphisme extérieur à puissances irréductibles et $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track (absolu) représentant Φ . Un tel Φ possède un représentant topologique $f_0 : G \rightarrow G$ qui est un train-track (absolu) ⁵. Si $N \geq 2$, l'unique strate de G est exponentielle; Φ possède donc une unique lamination attractive Λ_{Φ}^+ . On peut construire une ligne de G représentant une ligne générique de Λ_{Φ}^+ en choisissant un point périodique x de f_0 ($f_0^p(x) = x$) à l'intérieur d'une arête e de G , et en itérant f_0^p sur un voisinage de x qui est un arc contenu dans e . À la limite, on obtient un ligne de G , dont un relevé à \tilde{G} représente une ligne générique de Λ_{Φ}^+ .

Remarque 4.8. Une arête e de G étant fixée, un chemin fini w de G est dans le langage laminaire de Λ_{Φ}^+ si, et seulement s'il existe $p \geq 1$ tel que w est sous-chemin de $f_0^p(e)$.

Soit G un graphe dont on considère que les arêtes sont de longueur 1. Une ligne B de \tilde{G} est dit **quasipériodique** si pour tout $L > 0$ il existe $L' > L$ tel que tout sous-chemin de longueur L de B apparaît comme sous-chemin de tout sous-chemin de longueur L' de B . Une ligne de \mathcal{B} est dite quasipériodique s'il existe une ligne de \tilde{G} quasipériodique la représentant (et dans ce cas, tout représentant est quasipériodique). De manière équivalente, une ligne B de \tilde{G} est quasipériodique si pour tout sous-chemin fini m de B , m apparaît une infinité de fois dans B , et deux occurrences successives de m sont à distance bornée (ie B est à **lacunes bornées**). Les lignes génériques de Λ_{Φ}^+ sont quasipériodiques.

Dans [2], les auteurs démontrent le résultat suivant, que nous utiliserons par la suite :

Théorème 4.9 (Bestvina-Feighn-Handel). Si $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ est un automorphisme extérieur à puissances irréductibles, alors le stabilisateur $\text{Stab}(\Lambda_{\Phi}^+)$ de Λ_{Φ}^+ dans $\text{Out}(F_N)$ est virtuellement infini cyclique.

³ $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ est à puissances irréductibles si pour tout $p \geq 1$, Φ^p ne fixe aucun facteur libre non trivial de F_N ; on dit aussi que Φ est "iwip" (pour "irreducible with irreducible powers").

⁴cf [2].

⁵cf section 1 de [5].

3.3 Points fixes attractifs et laminations

Le résultat principal de cette section est le :

Théorème 4.10. Si $X \in \partial F_N$ est un point fixe attractif de $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ à puissances irréductibles, et si $\psi \in \text{Aut}(F_N)$ fixe X , alors l'automorphisme extérieur Ψ défini par ψ stabilise la lamination attractive Λ_Φ^+ de l'automorphisme extérieur Φ défini par φ .

Preuve. Soit $f_0 : G \rightarrow G$ un train-track représentant Φ et $g_0 : G \rightarrow G$ un représentant topologique de Ψ sur le même graphe G . On note C la borne de simplification de g_0 . On considère f (resp. g) le relevé f_0 (resp. g_0) à \tilde{G} couplé avec φ (resp. ψ), et R_v un rayon dans \tilde{G} représentant X , choisi comme dans la proposition 4.4, et muni de son scindement adapté (cf définition 4.5). On note l_0 la longueur maximale d'une brique singulière de R_v .

Soit u un segment d'une feuille générique l de $\Lambda_\Phi^+(G)$. On va montrer qu'il existe une occurrence de $g_{0\#,C}(u)$ dans R_v entièrement contenue dans une brique régulière. Dans ce cas, $g_{0\#,C}(u)$ est encore un segment de feuille de $\Lambda_\Phi^+(G)$, et d'après le lemme 4.7, la proposition sera démontrée.

Puque l est quasipériodique, u apparaît une infinité de fois dans l . On peut donc trouver un segment U de l de la forme uu_0u avec u_0 de longueur supérieure à toute constante choisie à l'avance. En particulier, on peut choisir u_0 de façon que :

$$|g_{0\#}(u_0)| \geq l_0 + 2C. \quad (4.1)$$

En effet, g étant une quasi-isométrie, il existe des constantes positives μ et ν telles que $\mu^{-1}|m| - \nu \leq |g_{0\#}(m)| \leq \mu|m| + \nu$ pour tout chemin m ; il suffit donc de prendre u_0 de longueur supérieure ou égale à $\mu(l_0 + 2C + \nu)$.

D'après la remarque 4.8, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que dans toute brique régulière $b_{i,k}$ avec $k \geq K$, il y a une occurrence de U . En particulier, il y a une infinité d'occurrences de U dans R_v , et donc une infinité d'occurrences de $g_{0\#,C}(U)$ dans $g_{0\#}(R_v)$. Puisque $\psi(X) = X$, $g_{0\#}(R_v) \cap R_v$ est un sous-rayon de R_v , et il y a donc une infinité d'occurrences de $g_{0\#,C}(U)$ dans R_v : on désigne par (w_j) une suite d'occurrences deux à deux distinctes de $g_{0\#,C}(U)$ dans R_v .

Remarquons que si m est un chemin, il n'y a qu'un nombre fini d'occurrences de m dans R_v qui contiennent entièrement une brique régulière (puisque il existe un sous-rayon R de R_v tel que toute brique régulière contenue dans R soit de longueur strictement supérieure à $|m|$).

S'il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que w_j soit entièrement contenue dans une brique régulière, alors il existe une occurrence de $g_{0\#,C}(u)$ dans cette brique (puisque $g_{0\#,C}(u)$ apparaît comme sous chemin de $g_{0\#,C}(U)$), et la proposition est démontrée. Sinon, d'après

ce qui précède, tous les w_j , sauf un nombre fini, rencontrent au plus deux briques régulières et une brique singulière de R_v . Plus précisément, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que l'on est dans un des cas suivants :

- i) tous les w_j rencontrent deux briques régulières et une brique singulière qui les séparent,
- ii) tous les w_j rencontrent une brique régulière et une brique singulière consécutives,
- iii) tous les w_j rencontrent deux briques régulières consécutives ;

et dans chacun des cas, on peut supposer que les points du scindement adapté de R_v apparaissent toujours à la même place dans chaque occurrence (puisque $g_{0\#,C}(U)$ est un chemin fini).

Dans le cas i), $g_{0\#,C}(U) = u_1 \cdot b \cdot u_2$ où les u_i sont des chemins légaux, et b une puissance du chemin de Nielsen. Or il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $|u_i| \geq (|g_{0\#,C}(U)| - l_0)/2$. Or $|g_{0\#,C}(U)| \geq 2|g_{0\#,C}(u)| + |g_{0\#,C}(u_0)|$, puisque $U = uu_0u$. En utilisant (4.1), il vient $|u_i| \geq |g_{0\#,C}(u)|$. Par conséquent $g_{0\#,C}(u)$ apparaît comme sous-chemin d'une brique régulière.

Dans le cas ii), supposons par exemple que la brique régulière précède la brique singulière : alors $g_{0\#,C}(U) = u_1 \cdot b'$ où pour toutes les occurrences de $g_{0\#,C}(U)$, u_1 est contenu dans une brique régulière, et b' dans une brique singulière. Alors $|u_1| \geq |g_{0\#,C}(U)| - l_0 \geq |g_{0\#,C}(u)|$, et donc $g_{0\#,C}(u)$ apparaît comme sous-chemin d'une brique régulière.

Dans le cas iii), $g_{0\#,C}(U) = u_1 \cdot u_2$ où les u_i sont des chemins légaux, et le point du scindement adapté de R_v traversé par w_j est un relevé du point de scindement de $g_{0\#,C}(U) = u_1 \cdot u_2$. Comme dans le cas i), on obtient qu'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $|u_i| \geq |g_{0\#,C}(U)|/2 \geq (2|g_{0\#,C}(u)| + |g_{0\#,C}(u_0)|)/2 \geq |g_{0\#,C}(u)|$. On conclut ici encore que $g_{0\#,C}(u)$ apparaît comme sous-chemin d'une brique régulière, ce qui finit de démontrer la proposition. \square

La proposition suivante montre qu'un automorphisme périodique ne peut fixer un point fixe attractif d'un automorphisme à puissances irréductibles.

Proposition 4.11. Soit $X \in \partial F_N$ un point fixe attractif d'un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ tel que l'automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ qu'il définit est à puissances irréductibles. Si $\psi \in \text{Aut}(F_N)$ est un automorphisme périodique qui fixe X , alors ψ est l'identité.

Preuve. En effet, puisque ψ est périodique, les points fixes de $\partial\psi$ sont singuliers (cf [12]), et d'après [9], $\text{Fix}\psi$ est un facteur libre de F_N . En particulier, si ψ n'est pas l'identité, $\text{Fix}\psi$ est d'indice infini dans F_N , et d'après la proposition 2.4 de [2], $\text{Fix}\psi$

ne porte pas la lamination attractive de Φ . Cela signifie ⁶ que si $f_0 : G \rightarrow G$ est un représentant topologique de Φ , et $\tau : G' \rightarrow G$ une immersion de graphes telle que $\pi_1(\text{Im}(\tau)) = \text{Fix}\psi$, il existe une feuille générique l de $\Lambda_\Phi^+(G)$ qui ne se relève pas à G' . En particulier, un sous-chemin fini w suffisamment long de l ne se relèvera pas à G' .

Soit R un rayon de G représentant X . D'après la remarque 4.8, w apparaît dans toute brique régulière de R suffisamment longue. En particulier, w apparaît une infinité de fois dans R , et donc R lui non plus ne peut être relevé à G' . Par conséquent, X ne peut être laissé fixe par $\partial\varphi$. \square

Corollaire 4.12. Si $X \in \partial F_N$ est un point fixe attractif d'un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(F_N)$ dont l'automorphisme extérieur $\Phi \in \text{Out}(F_N)$ qu'il définit est à puissances irréductibles, alors $\text{Stab}(X)$ s'injecte dans $\text{Stab}(\Lambda_\Phi^+)$ par $\text{ext} : \text{Aut}(F_N) \rightarrow \text{Out}(F_N)$. De plus, le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_N)$ est infini cyclique.

Preuve. Comme conséquence immédiate du théorème 4.10 et de la proposition 4.2, on obtient que $\text{Stab}(X)$ s'injecte dans $\text{Stab}(\Lambda_\Phi^+)$. Le théorème 4.9 (de M. Bestvina, M. Feighn et M. Handel) assure alors que $\text{Stab}(X)$ est virtuellement infini cyclique. La proposition 4.11 permet alors de conclure que $\text{Stab}(X) \cong \mathbb{Z}$. \square

4 Sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ fixant un point de ∂F_2

Le but de cette section est de déterminer quels sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ peuvent apparaître comme stabilisateurs d'un point $X \in \partial F_2$. J'utiliserai certains faits dont j'ai discuté dans la section 2.3 du chapitre 3.

Si $X \in \partial F_2$ n'est pas un point rationnel, et qu'il existe un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(F_2)$ non trivial fixant X , alors l'automorphisme extérieur Φ est :

1. soit à puissances irréductibles (ie f est un pseudo-Anosov),
2. soit à croissance linéaire (ie f^2 est un twist de Dehn),

(où f désigne l'homéomorphisme du tore à un trou qui induit Φ sur le groupe fondamental). Sinon, Φ serait périodique, et donc, d'après le lemme 3.3, X serait rationnel.

Le corollaire 4.12 entraîne que si φ et ψ fixent X , alors Φ et Ψ sont soit tous les deux à puissances irréductibles, soit tous les deux à croissance linéaire. Dans le premier cas, ce même corollaire dit que le stabilisateur de X est infini cyclique.

Dans le second cas, on considère f et g des éléments du groupe modulaire du tore à un trou qui induisent respectivement Φ et Ψ sur le groupe fondamental : f^2

⁶Je renvoie le lecteur à la section 2 de [2] pour plus de détails.

et g^2 sont des twists de Dehn. Nécessairement, f^2 et g^2 twistent selon une puissance d'une même courbe simple γ , sinon $f^2 \circ g^2$ définit un homéomorphisme pseudo-Anosov ⁷, et donc $\Phi^2 \circ \Psi^2$ est automorphisme à puissances irréductibles qui fixe X , ce qui est exclu par le corollaire 4.12.

Un calcul simple montre que dans $GL_2(\mathbb{Z})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($p \in \mathbb{Z}$) possède une racine carrée si, et seulement si p est pair. Dans ce cas A possède exactement deux racines carrées : $\pm \begin{pmatrix} 1 & p/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'involution $\sigma \in \text{Aut}(F_2)$ définie par :

$$\begin{aligned} \sigma : a &\mapsto a^{-1} \\ b &\mapsto b^{-1}. \end{aligned}$$

La classe extérieure S de σ engendre le centre de $\text{Out}(F_2)$ (si l'on utilise l'identification de $\text{Out}(F_2)$ avec $GL_2(\mathbb{Z})$, S correspond à la matrice $-I_2$). Si l'on désigne par $D \in \text{Out}(F_2)$ l'automorphisme extérieur induit par le twist de Dehn le long de γ dans le tore à un trou, on a en fait montré que $\Phi, \Psi \in \langle D, S \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'après la proposition 4.2, $\text{Stab}(X)$ s'injecte dans $\langle D, S \rangle$. De plus, d'après le lemme 3.3, puisque X n'est pas rationnel, si $\varphi \in \text{Stab}(X)$, alors Φ n'est pas périodique. Finalement, $\text{Stab}(X)$ s'injecte dans $\langle D \rangle \simeq \mathbb{Z}$, et donc $\text{Stab}(X)$ est infini cyclique. On a donc prouvé le :

Théorème 4.13. Soit $X \in \partial F_2$ un point non rationnel. Alors le stabilisateur de X dans $\text{Aut}(F_2)$ est soit trivial, soit infini cyclique.

Si $X \in \partial F_2$ est un point rationnel, alors $\text{Stab}(X) = \text{Stab}(\sqrt{X})$ (cf proposition 4.1). D'après [28], le stabilisateur dans $\text{Aut}(F_N)$ d'un élément de F_N est de présentation finie. Dans [6], on trouve une description complète des stabilisateurs d'éléments de F_2 : à isomorphisme près, on obtient les groupes \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 , $\langle x, y | x^2 = y^2 \rangle$, $\langle x, y | x^2 = 1, [x, y^2] = 1 \rangle$, $\langle x, y | xyx = yxy \rangle$.

Finalement, on a obtenu le :

Corollaire 4.14. À isomorphisme près, les sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ qui fixent un élément du bord de F_2 sont les mêmes que ceux qui fixent un élément F_2 (à savoir : \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 , $\langle x, y | x^2 = y^2 \rangle$, $\langle x, y | x^2 = 1, [x, y^2] = 1 \rangle$, $\langle x, y | xyx = yxy \rangle$).

⁷Voir par exemple [18]. On peut aussi raisonner en utilisant l'identification entre $\text{Out}(F_2)$ et $GL_2(\mathbb{Z})$.

Bibliographie

- [1] M. Bestvina, M. Feighn, and M. Handel, *The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$, II : A Kolchin type theorem*, preprint.
- [2] ———, *Laminations, trees, and irreducible automorphisms of free groups*, GAFA **7** (1997), 215–244.
- [3] ———, *The Tits alternative for $\text{Out}(F_n)$, I : Dynamics of exponentially growing automorphisms*, Ann. Math. **151** (2000), 517–623.
- [4] ———, *Solvable subgroups of $\text{Out}(F_n)$ are virtually Abelian*, Geom. Dedicata **104** (2004), 71–96.
- [5] M. Bestvina and M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Ann. Math. **135** (1992), 1–51.
- [6] O. Bogopolski, *Classification of automorphisms of the free group of rank 2 by ranks of fixed-point subgroups*, J. Group Theory **3** (2000), 339–351.
- [7] Casson and Bleier, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [8] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1441, Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [9] J. L. Dyer and G. P. Scott, *Periodic automorphisms of free groups*, Comm. Alg. **3** (1975), 195–201.
- [10] D. Epstein, J. Cannon, D. Holt, S. Levy, M. Paterson, and W. Thurston, *Word processing in groups*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992.
- [11] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru (eds.), *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque, vol. 66-67, Société Mathématique de France, Paris, 1976.
- [12] D. Gaboriau, A. Jaeger, G. Levitt, and M. Lustig, *An index for counting fixed points of automorphisms of free groups*, Duke Math. J. **93** (1998), 425–452.

- [13] D. Gaboriau and G. Levitt, *The rank of actions on \mathbb{R} -trees*, Ann. Sc. ENS **28** (1995), 549–570.
- [14] D. Gaboriau, G. Levitt, and M. Lustig, *A dendrological proof of the Scott conjecture for automorphisms of free groups*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **41** (1998), 325–332.
- [15] E. Ghys and P. de la Harpe (eds.) (eds.), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [16] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (S. M. Gersten, ed.), MSRI Pub, vol. 8, Springer-Verlag, 1987, pp. 75–263.
- [17] M. Handel and W. Thurston, *New proofs of some results of Nielsen*, Adv. in Math. **56** (1985), 173–191.
- [18] N. Ivanov, *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 115, American Mathematical Society, Providence, 1992.
- [19] B. J. Jiang, *Lectures on Nielsen fixed point theory*, Contemp. Math., vol. 14, American Mathematical Society, Providence, 1983.
- [20] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol. 54, Cambridge University Press, Berlin, 1995.
- [21] G. Levitt, *Homéomorphismes dynamiquement simples de l'ensemble de Cantor*, Enseign. Math. **44** (1998), 279–289.
- [22] G. Levitt and M. Lustig, *Automorphisms of free groups have asymptotically periodic dynamics*, preprint.
- [23] ———, *Most automorphisms of a hyperbolic group have very simple dynamics*, Ann. Sci. ENS **33** (2000), 507–517.
- [24] ———, *Periodic ends, growth rates, Hölder dynamics for automorphisms of free groups*, Comment. Math. Helv. **75** (2000), 415–429.
- [25] ———, *Irreducible automorphisms of F_n have north-south dynamics on compactified outer space*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 59–72.
- [26] M. Lustig, *Structure and conjugacy for automorphisms of free groups I*, preprint.
- [27] ———, *Structure and conjugacy for automorphisms of free groups II*, preprint.
- [28] J. McCool, *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group*, J. Algebra **35** (1975), 205–213.
- [29] R. Miller, *Geodesic laminations from Nielsen's viewpoint*, Adv. in Math. **45** (1982), 189–212.

- [30] J. Nielsen, *Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, Math. Ann. **78** (1917), 385–397.
- [31] ———, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. **50** (1927), 189–358, traduction anglaise dans *Collected Mathematical Papers*, Birkhäuser (1986).
- [32] ———, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, II*, Acta Math. **53** (1929), 1–76, traduction anglaise dans *Collected Mathematical Papers*, Birkhäuser (1986).
- [33] ———, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, III*, Acta Math. **58** (1932), 87–167, traduction anglaise dans *Collected Mathematical Papers*, Birkhäuser (1986).
- [34] ———, *Surface Transformation Classes of Algebraically Finite Type*, Mat.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. **21** (1944).
- [35] K. Reidemeister, *Automorphismen von Homotopiekettenringen*, Math. Ann. **112** (1936), 586–593.
- [36] G. P. Scott and C. T. C. Wall, *Topological methods in group theory*, Homological Methods in Group Theory (Cambridge) (C. T. C. Wall, ed.), London Math. Soc. Lec. Notes, vol. 936, Cambridge University Press, 1979.
- [37] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque, vol. 46, Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [38] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. AMS **19** (1988), 417–431.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la dynamique de l'homéomorphisme $\partial\varphi$ induit par un automorphisme φ du groupe libre F_N sur son bord ∂F_N .

Je m'intéresse aux automorphismes φ de F_N tels que les points périodiques de φ et $\partial\varphi$ sont en fait des points fixes (tout automorphisme possède une puissance qui vérifie cette propriété). Je montre que l'ensemble L_φ^+ des points d'accumulation des suites $\partial\varphi^k(X)$ (où X décrit les points de ∂F_N non fixés par $\partial\varphi$) est fini modulo l'action du sous-groupe fixe $\text{Fix}\varphi$ par translation à gauche. De plus, lorsqu'un tel point est dans le bord du sous-groupe fixe, j'obtiens qu'il est rationnel. La preuve repose sur une étude minutieuse d'un arbre réel φ -invariant (au sens de Levitt-Lustig), et demande un travail technique préalable sur les train-tracks relatifs améliorés de Bestvina-Feighn-Handel.

Ce résultat me permet de construire un nouvel invariant pour un automorphisme φ de F_N (dont les points périodiques sont fixes) : son graphe dynamique Γ_φ . Je donne une description des graphes dynamiques que l'on obtient pour des automorphismes induits par des homéomorphismes pseudo-Anosov de surfaces à bord. J'étudie en détail la dynamique des automorphismes de F_2 . Je donne aussi un exemple d'automorphisme φ de F_4 possédant une orbite parabolique, ie pour lequel il existe un point X du bord tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \partial\varphi^k(X) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \partial\varphi^{-k}(X)$.

Par ailleurs, je démontre que le stabilisateur dans $\text{Aut}(F_N)$ d'un point fixe attractif d'un automorphisme à puissances irréductibles est infini cyclique. J'en déduis que le stabilisateur dans $\text{Aut}(F_2)$ d'un point $X \in \partial F_2$ non rationnel est soit trivial, soit infini cyclique ; et je donne, à isomorphisme près, la liste des sous-groupes de $\text{Aut}(F_2)$ obtenus comme stabilisateurs d'un point de ∂F_2 .